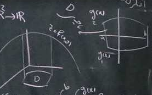
انتگرال دوگانه:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

x y

مساحت ناحیه D:

$$\iint_D dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx$$

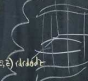
قطبی

$$\iint f(x,y)\,dA=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

انتگرال سه‌گانه

$$\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

x y z



حجم:

$$\iiint_V dV$$

مختصات استوانه‌ای

(r,θ,z)

$$\iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=\int_\theta\int_r\int_z f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

مختصات کروی

(ρ,φ,θ)

$r=\rho\sin\varphi$

$dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$$\iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx=$$

$$\int_\theta\int_\varphi\int_\rho f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

قضیه گرین

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

$$\int_C G \cdot \vec{dr} =$$

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_t P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

توابع برداری روی خم‌ها

$G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$G(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

$$\int_C F\, ds =$$

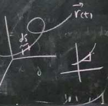
$$\int_t F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

انتگرال توابع عددی روی خم‌ها

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$



انتگرال توابع عددی روی رویه‌ها

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$S: z=f(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

$$\iint_{(x,y)} F(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy$$

انتگرال توابع برداری روی رویه

$Pi+Qj+Rk \leftarrow G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$S: z=f(x,y)$

$\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$

$$\iint_S G\cdot\vec{n}\,dS=$$

$$\iint_{(x,y)} \big(P(x,y,f(x,y))(-f_x)+Q(x,y,f(x,y))(-f_y)+R(x,y,f(x,y))\big)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{(x,y)} G\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dx\,dy$$

استوکس

تابع برداری $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\oint_C G\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times G)\cdot\vec{n}\,dS$$

دیورژانس

$G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\iint_S G\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V(\nabla\cdot G)\,dV$$

$$\begin{cases} z = 1 - 2y \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - 2y = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2y - x^2 - y^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$x^2 + (y-1)^2 = 1 \to$ دایره

$f_x = 0$

$f_y = -2$

$$dS = \sqrt{0 + 4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\iint_S (xz - x)\, dS$$

$$\int_{-1}^{1}\int (x(1-2y) - x)\sqrt{5}\, dy\, dx$$

$x - 2yx - x \qquad dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$

$-2r\sin\theta\, r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = 2y$

$r^2 = 2r\sin\theta$

$r = 2\sin\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} -2r^2 \sin\theta\cos\theta\, \sqrt{5}\, dr\, d\theta$$

$\theta \qquad r$

$z + 2y = 1$

$z = 1 - 2y$

$z = 1 - x^2 - y^2$

سوال

فرض کنید که S بخشی از صفحه ... باشد که توسط سهمی گون برش داده شده است.

الف) $\iint_S (xz - x)\, d\sigma$

ب) $\int_C F \cdot dr$ ← را بیابید

$F = xz^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

$$\int_0^{r\sin\theta} -r^2 \sin 2\theta \, dr \qquad x^2+y^2=2y$$

$$\sin 2\theta \left(-\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{2\sin\theta}\right) = -\frac{1}{4}\left(16\sin^4\theta\right) \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\int_0^{\pi} -8\sin^5\theta\cos\theta \, d\theta = -8\frac{\sin^6\theta}{6}\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_C F \cdot dr = \iint (\nabla \times F)\cdot \vec{n} \, dS = \iint 2zx \, dx\,dy$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & yz & z^2 \end{vmatrix} = (0 - y)\vec{i} + (0 + 2zx)\vec{j} + (\dots)\vec{k}$$

$$n = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 2, 1)$$

$z + 2y = 1$

$z = 1 - 2y$

$z = 1 - x^2 - y^2$

سوال

فرض کنید که C منحنی [illegible] از [illegible]

باشد که توسط [illegible]

[illegible] است.

الف)

$$\iint (xz - x) \, d\sigma$$

ب)

$$\int_C F \cdot dr$$

[illegible]

$$F = xz^2\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$\oint_C F\cdot \vec{dr} = \iint_R (Q_x - P_y)\, dA$$

$Q_x = ۳x^۲ \qquad P_y = -۳y^۲$

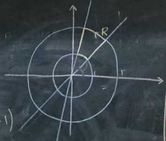
$$\iint ۳(x^۲+y^۲)\, dA = ۳ \times \text{الف} = \frac{۴۵\pi}{۴۸}$$

$$\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\int_۱^۲ r^۲\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}\right)\int_۱^۲ r^۳\, dr$$

$$= \frac{\pi}{۱۲}\, \frac{r^۴}{۴}\Big|_۱^۲ = \frac{\pi}{۴۸}(۱۶-۱)$$

$$= \frac{۱۵\pi}{۴۸}$$



سوال

R نیم‌بالای صفحه xy محدود به خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ و دایره‌های

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=4$

الف) $\iint_R (x^2+y^2)\, dA$

$F = \underbrace{(x^3-y^3)}_{P}\vec{i} + \underbrace{(x^3+y^3)}_{Q}\vec{j}$

ب) C مرز R در جهت مثبت، $\oint_C F\cdot dr = ?$

$$\iint F\cdot\vec n\, dS = \iiint_V \nabla\cdot F\, dV$$

$$= \iiint_V (y + 0 + 0)\, dV = \iiint_V y\, dV = 0$$

$$\iiint_T y\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho\sin\varphi\sin\theta\, \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi \times (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$dV = \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$F = (xy + z^2)\vec i + (x^3 + z^3)\vec j + (2x - 3y^2)\vec k$

$$\iint F\cdot n\, dS$$

$$\iiint_T y\, dx\, dy\, dz$$