تعریف:

فرض کنید $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ یک میدان برداری باشد. دیورژانس این میدان

Divergence

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

قضیه (دیورژانس - گاوس)

فرض کنید S یک سطح بسته ... همراه ...

$S = z = f(x,y)$

$G = (P, Q, R)$

فرض کنید S در معرض میدان برداری $G = (P, Q, R)$ قرار گرفته است.

هدف: محاسبه شار گذرنده از سطح S

قضیه دیورژانس

$$\iint_S G \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} G \, dv = \iiint_V \nabla \cdot G \, dv$$

مثال

شار میدان $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ را از سطح کره‌ی واحد (جهت‌دار به سمت بیرون) S بیابید.

$$x^2+y^2+z^2=1$$

راه اول

محاسبه‌ی مستقیم

$$\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

به عهده‌ی شما

راه دوم

استفاده از قضیه‌ی دیورژانس

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dv$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 0 + 1 + 0 = 1$$

تابع عددی

پس

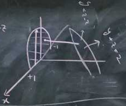
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint 1\, dv$$

V کره‌ی واحد

$$= \text{حجم کره‌ی واحد} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z}$$

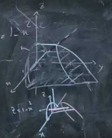
x z y



$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = y + 2y + 0 = 3y$$

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V 3y\, dV =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} 3y\, dy\, dz\, dx$$



$z = 1-x^2$

مثال

فرض کنید

$$F(x,y,z) = xy\,\vec{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\vec{j} + \sin(xy)\,\vec{k}$$

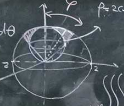
و فرض کنید S رویه‌ی محصور کننده‌ی استوانه سهموی $z=1-x^2$

و صفحات $z=0$، $y=0$، $y+z=2$ باشد.

$\iint F\cdot\vec{n}\, dS$ مطلوب است

$$\iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{2\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$\theta \quad \varphi \quad \rho$



$\rho = 2\cos\varphi$

$$\int_{2\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho = \sin\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{2\cos\varphi}^{2} = \frac{\sin\varphi}{3}\left(8 - 8\cos^3\varphi\right)$$

$\iiint dV$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2+z^2 = 4$

$x^2+y^2+z^2 = 2z$

$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$

$x^2+y^2+z^2 = 2z$

$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$

$\rho = 2\cos\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

$\iint F \cdot \vec{n} \, dS$

$$F = \left(x + \sin(yz)\right)\vec{i} + \left(y + e^{xz}\right)\vec{j} + \left(z - \frac{x}{2+x^2}\right)\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left((1+x^2)^3 - 4\right) dx = \cdots$$

$$\int_0^{2-z} 3y \, dy = \frac{3}{2}y^2 \Big]_0^{2-z} = \frac{3}{2}(2-z)^2$$

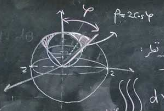
$$\frac{3}{2}\int_0^{1-x^2} (2-z)^2 \, dz = -\frac{1}{2}(2-z)^3 \Big|_0^{1-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2-(1-x^2)\right)^3 = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^3 - 4$$

$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3$

$\iint F \cdot n \, dS = \iiint \operatorname{div} F \, dv = \iiint ۳ \, dv$

$= ۳ \times V_0$



$\iiint dv$

توجه

حجم ناحیه محصور:

$z = \sqrt{x^2+y^2}$. داخل مخروط

و داخل $x^2+y^2+z^2=4$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 2z$

T ناحیه جسمی محدود بین کره های

فرض کنید

الف) حجم T را محاسبه کنید.

باشد.

سطح ناحیه T و ...

$\iint F \cdot n \, dS$

$F = (x + \sin(yz))\vec{i} + (y + e^{xz})\vec{j} + (z - \frac{x}{2+x^2})\vec{k}$

حل

$\int_0^{۲\pi} A \, d\theta = ۲\pi A$

$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint \operatorname{div} F \, dV$

$\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۸ \sin\varphi}{۳} (1 - \cos^۳\varphi) \, d\varphi$

$u = \cos\varphi$

$du = -\sin\varphi \, d\varphi$

$\frac{۸}{۳} \int_1^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} (u^۳ - 1) \, du = \frac{۸}{۳} \left(\frac{u^۴}{۴} - u \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۸}{۳} \left(\frac{۱}{۱۶} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۴} + ۱ \right)$

$\frac{۸}{۱۶ \times ۳} \left(۱ - ۸\sqrt{۲} - ۴ + ۱۶ \right) = A$