امتحان میان ترم دوشنبه ی

[illegible] سیل زده

مطابق آنچه در سایت

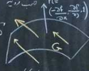
گذاشته شده است.

انتگرال گیری از توابع برداری روی رویه

$S : z = f(x,y)$

جهت رویه $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$

$G(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$



$$\iint_S G\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right)dx\,dy$$

مثال

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS$$

را باید کرد آن

$\vec{F} = 3x\vec{i} + 2z\vec{j} + (1-y^2)\vec{k}$

و S بخشی از رویه $z = 2-3y+x^2$

است که بالای مثلث با رئوس $(0,0)$، $(2,0)$، $(2,-4)$

قرار گرفته است.

که در جهت مثبت z است.

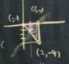
$S: z = \overbrace{2-3y+x^2}^{f(x,y)}$

$f_x = 2x$

$f_y = -3$

بردار نرمال $= (2x, -3, -1) = (f_x, f_y, -1)$

$$\iint (F\cdot n)\,dS = \iint (6x^2 - 6z + y^2 - 1)\,dx\,dy$$



$$\int_0^2 \int_{-2x}^{0} \left(6x^2 - 6(2-3y+x^2) + y^2 - 1\right)dy\,dx = \ldots$$

امتحان میان ترم و ترم دی
انشاءالله طبق سیلابس
مطابق آنچه در سایت
نوشته شده است.

تعریف

فرض کنید $G(x,y,z)=(P,Q,R)$ یک میدان برداری باشد:

$$\text{Curl}\, G := \nabla \underset{\text{ضرب خارجی}}{\times} G$$

$G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$\text{Curl}\, G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

مثال

فرض کنید $F = xz\vec{i}+xyz\vec{j}-y^2k$

$\text{Curl}\, F = ?$

$$\text{Curl}\, F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} =$$

$$i\left(-2y-xy\right)-j\left(0-x\right)+k\left(yz-0\right)=\left((-2y-xy),\ x,\ yz\right)$$

$$F = (P, Q, 0)$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(Q_x - P_y)$$

$$\operatorname{curl} F \cdot \vec{n} = (Q_x - P_y)$$

تمرین

نشان دهید که قضیه‌ی گرین حالت خاصی از قضیه‌ی استوکس است.

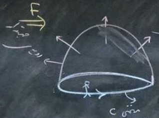
$$F = (\underset{(x,y)}{P}, \underset{(x,y)}{Q}, 0)$$

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

گرین

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

$$F = (P, Q)$$

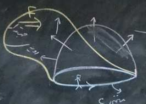


قضیه‌ی استوکس

میدان برداری F

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \underbrace{(\operatorname{curl} F) \cdot \vec{n}\, dS}$$

قضیه استوکس



F میدان برداری

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \underbrace{(\mathrm{curl}\,F)\cdot\vec{n}\,dS}$$

انتگرال میان ترم و ترم‌ی
انحنای ... سیل زده
مطابق آنچه در بالا
نوشته شده است.

مثال

$$\int_C F\cdot dr$$

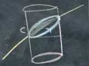
$$F=(-y^2,x,z^2)$$

C منحنی محل اشتراک رویه‌ها

$y+z=2$

$x^2+y^2=1$

از بالا در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.



پاسخ بدون استفاده از قضیه استوکس

① پارامتری منحنی

$$C:\ \vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2-\sin t)$$

$$0\le t\le 2\pi$$

(P,Q,R)

$$\oint_C F\cdot dr=\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

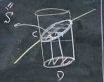
$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t)(-\sin t)\,dt+(\cos t)(\cos t)\,dt+(2-\sin t)^2(-\cos t)\,dt$$

$$=\cdots$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta = \dots$$

$z = 2-y$

$\overset{!!}{S}$



$$z = f(x,y) = 2-y$$

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0,1,1)$$

$$\iint_S (\text{curl}\, F\cdot n)\, dS = \iint_{(x,y)\in x^2+y^2\le 1} (1+2y)\, dx\,dy$$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S \text{curl}\, F\cdot n\, dS$$ پاسخ با استفاده از استوکس

$$\text{curl}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(1+2y) = (0,0,1+2y)$$

امتحان میان ترم ویژه‌ی دانشجویان مناطق سیل زده مطابق آنچه در سایت نوشته شده است.

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\iint z\,ds = \Rightarrow \iint \sqrt{4-x^2-y^2}\sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + 1}$$

$$x^2+y^2-2y=0$$

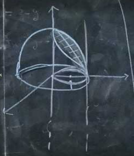
$$x^2+(y-1)^2=1$$

معادله رویه: $Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$z=f(x,y)$

یادآوری: انتگرال تابع عددی $G(x,y,z)$ روی رویه

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint G(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA$$



مثال: فرض کنید S قسمتی از سطح نیمکره‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ باشد که توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=2y$ احاطه شده است.

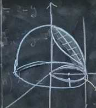
① $\iint_S z\,dS$

② اگر $F=(-y,x,z)$ و C مرز رویه‌ی فوق در جهت مثبت نسبت به قائم آن باشد

$$\oint_C F\cdot dr = ?$$

$$\int_0^{2\sin\theta} 2r\,dr = r^2 \Big|_0^{2\sin\theta} = 4\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} 4\sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} 2(1-\cos 2\theta)\, d\theta = 2\theta - \sin 2\theta \Big|_0^{\pi} = 2\pi$$



$x^2+y^2=2y$

$r^2 = 2r\sin\theta$

$r = 2\sin\theta$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \sqrt{4-r^2}\,\sqrt{\frac{4}{4-r^2}}\; r\,dr\,d\theta$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}+1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+4-x^2-y^2}{4-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(1+1) = 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)$$

1)

$$\iint \operatorname{curl} F \cdot n\, dS = \iint_{\substack{(x,y) \in x^2+y^2=2y \\ y \geq 0}} 2 \, dx\, dy =$$

$2 \cdot$ مساحت $= 2\pi$

$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$x^2+y^2=2y$

$r^2 = 2r\sin\theta$

$r = 2\sin\theta$

$$\int_C F \cdot dr = \underbrace{\iint_S (\operatorname{curl} F \cdot \vec{n}\, dS)}$$

②

$f = (-y, x, z)$

(در جهت مثبت نسبت به ...) مرز رویه C

$$\oint_C F \cdot dr = ?$$

مثال) فرض کنید C خم حاصل از برخورد صفحه $z=y$ با استوانه $x^2+y^2=1$ باشد. مطلوب است

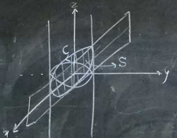
$$\oint_C (2x+y)\,dx+(x+y+z)\,dy+(z-x)\,dz$$

C در جهت مثبت نسبت به [illegible]

نمرات کوئیز [illegible] اعلام [illegible]

کلاس حل تمرین [illegible]

$$F=(2x+y,\ x+y+z,\ z-x)$$



$$\oint F\cdot dr=\iint \operatorname{Curl}F\cdot n\,dS$$

$$\operatorname{Curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+y+z & z-x \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(0-1)-\vec{j}(-1+0)+\vec{k}(1-1)$$

$$=(-1,+1,0)$$

$$z=f(x,y)=y$$

$$\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)=(0,-1,1)$$

$$\iint \operatorname{Curl}F\cdot n\,dS=\iint_{(x,y)\in x^2+y^2\le 1}(-1)\,dA=-\pi$$