کلاس‌های حل تمرین

دیگر امتحان با پایان‌ترم

مطابق برنامه در سایت

دستیاران آموزشی

(از امروز)

یادآوری

متغیر x و y و z

اگر $G(x,y,z)$ یک تابع عددی باشد

و $z=f(x,y)$ یک رویه باشد

S: 

$z=f(x,y)$

آنگاه

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS$$

S رویه

$$dS=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\;dx\,dy$$

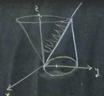
$$=\iint_{(x,y)\in D} G(x,y,f(x,y))\boxed{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\;dx\,dy$$

مثال

فرض کنید S قسمتی از مخروط (سطح) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد که بین صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=2y$ قرار دارد. مساحت S را محاسبه کنید.

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

$$S = \text{مساحت} = \iint_S 1\,dS$$



S: $z=\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

کلاس های حل تمرین
و ترمیم امتحان پایان ترم
مطابق برنامه در سایت
دستیاران آموزشی
(از امروز)

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{2}\; dx\,dy =$$

$\sqrt{2} \times D$ مساحت $= \sqrt{2}\,\pi$

D مساحت $= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$

θ $\qquad$ r

<u>مثال</u>

$\iint_S xyz\, dS$ را بیابید که S مثلث با رئوس $(1,0,0)$ و $(0,2,0)$ و $(0,1,1)$ است.

① معادله S را بنویسید
② dS را حساب کنید
③ حدود x و y را مشخص کنید

<u>مثال</u>

$\iint_S (x+y+z)\, dS$ را باید که در آن S کره‌ی واحد به مرکز مبدا است.

کلاس‌ها حل تمرین

[illegible]

مطابق برنامه در سایت

دستیاران آموزشی

(از امروز)

$G(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\cup$

رویه

$z = f(x,y)$

$$\iint_S G(x,y,z)\, dS = \iint_D G(x,y,f(x,y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

انتگرال‌گیری از توابع برداری روی رویه‌ها

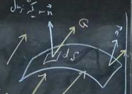
فرض کنید $G(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$

یک تابع برداری باشد. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

(میدان برداری)

همچنین فرض کنید $z = f(x,y)$

یک رویه جهت‌دار باشد که در معرض میدان G قرار دارد.



هدف محاسبه شار گذرنده از رویه.

شار گذرنده از واحد سطح (سطح به مساحت واحد)

$G \cdot \vec n$

مؤلفه عمود

شار گذرنده از المان dS:

$G \cdot \vec n\, dS$

شار کامل گذرنده از سطح:

$$\iint_S G \cdot \vec n\, dS$$

$\Rightarrow$ انتگرال یک تابع برداری روی سطح

کلاس‌ها حل تمرین

امتحان پایان ترم

و ترم

مطابق برنامه در سایت

دستیاران آموزشی

(از امروز)

تبدیل انتگرال فوق به انتگرال دوگانه

$$dS = \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\, dA \qquad G=(P,Q,R)$$

$$\vec{n} = \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

بهنجار

انتگرال‌گیری از توابع برداری روی رویه‌ها

$$\iint_S G\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S \frac{G\cdot(-f_x,-f_y,1)\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\, dA}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} = \iint_A G\cdot(-f_x,-f_y,1)\, dA$$

$$= \iint_{(x,y)\in D} (-Pf_x - Qf_y + R)\, dx\, dy$$

مثال

$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$ را بیابید که در آن S تمام مرز ناحیه صلب E باشد که توسط سهمی‌وار $z=1-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ احاطه شده است و جهت S بیرون جهت‌دار است.

$$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

کلاس‌ها، حل تمرین
و حتی امتحان پایان‌ترم
طبق برنامه درسی
تقویم آموزشی
(از امروز)

ابتدا $\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}\, dS$ را حساب می‌کنیم

$S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$

$f_x = -2x \qquad (-f_x, -f_y, 1) = \vec{n}$

$f_y = -2y$

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}\, dS = \iint (y, x, z)\cdot(2x, 2y, 1)\, dA$$

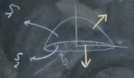
$$= \iint (y, x, 1-x^2-y^2)\cdot(2x, 2y, 1)\, dA$$

$$\iint F\cdot\vec{n}\, dS = \iint F\cdot(-f_x, -f_y, 1)\, \underbrace{dA}$$

$$= \iint_{(x,y)\in D} \left(2xy + 2xy + \underbrace{1-x^2-y^2}\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2) + 4r^2 \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{\frac{\sin(2\theta)}{2}}\; r\, dr\, d\theta = \cdots$$

مابقی به عهده شما



$S = S_1 \cup S_2$

کلاس‌های حل تمرین
دوره امتحان پایان‌ترم
مطابق برنامه در سایت
دستیاران آموزشی
(از امروز)

حل $\iint_{S_2} F\cdot\vec{n}\,dS$ را محاسبه می‌کنیم

$$dS_2 = dA$$

$$\vec{n} = (0,0,-1)$$

$$F\cdot\vec{n} = -z = 0$$

z روی صفحه صفر است

$$\iint_{S_2} F\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

مثال

گذرندگی شار میدان

$$F = \vec{i} + z\vec{j} + 6x\vec{k}$$

را از سطح کره به شعاع 3 با

$$x \leq 0,\quad y \geq 0,\quad z \geq 0$$

بخشی از ... با بردار رو به بیرون را بیابید

$$z = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\iint F\cdot\vec{n}\,dS = \iint (1, z, 6x)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right) dA$$

$$= \iint_{(x,y)\in D} \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + \frac{y\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 6x\right) dx\,dy$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{3} \left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{9-r^2}} + r\sin\theta + 6r\cos\theta\right) r\,dr\,d\theta$$

$= \dots$ بقیه‌ش

کلاس‌ها حل تمرین

استان با این ترم

ویژه

مطابق برنامه در سایت

دستیاران آموزشی

(از امروز)

تمرین

شار میدان

$$F = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$$

را از سطح کره‌ی واحد

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

در جهت درون بیابید

تمرین

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\, dS$$

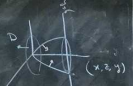
$$F = -x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$$

که بخشی از رویه

$$y = 3x^2 + 3z^2$$

پشت خط $y = 6$

جهت‌دار به سمت مثبت محور y.



$$\vec{n} = (-f_x, -f_z, 1)$$

$$= (-6x, -6z, 1)$$

$$\iint (-x, -z, 2y)\cdot(-6x, -6z, 1)\, dA$$

$$= \iint_{(x,z)\in D} 6x^2 + 6z^2 + 6x^2 + 6z^2 \; dx\,dz$$

$$\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$\operatorname{Curl} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

(Curl کرل = پیچش)

تعریف

فرض کنید $F=(P,Q,R)$ یک تابع برداری باشد

$$\operatorname{Curl} F = \underbrace{\nabla}_{\text{عملگر}} \underset{\text{ضرب برداری}}{\times} F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times F$$

استوکس

F برداری

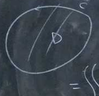
S

$$\oint_C F \cdot \vec{dr} \xrightarrow{\text{تعبیر استوکس}} \iint_S (?)\, dS$$

$F=(P,Q)$

گرین

یادآوری



$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$

کلاس های حل تمرین

و برای امتحان پایان ترم

مطابق برنامه در سایت

دستیاران آموزشی (از امروز)