انتگرالهای روی خمها:

① اگر $f(x,y)$ یک تابع عددی باشد و $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ یک خم هموار باشد

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_t f(x(t),y(t))\,|r'(t)|\,dt$$

② اگر $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ یک تابع برداری باشد، $C: \vec{r}(t)$ یک خم هموار، آنگاه

$$\int_C F(x,y)\,\underset{\vec{dr}}{\vec{ds}} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

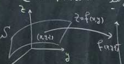
$$= \int_t P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_t Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

مباحث امروز

① انتگرالگیری از توابع عددی روی رویه

② 〃 〃 〃 برداری روی رویه

فرض کنید $f(x,y,z)$ یک تابع از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}$ باشد.



فرض کنید $\underbrace{z=f(x,y)}_{\text{رویه } S}$ یک رویه باشد.

هدف

تعریف

$$\iint f(x,y,z)\,dS$$

$$\sum f(x,y,z)\,\Delta S$$

$$\vec r_1 \times \vec r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & dy & f_y\,dy \\ dx & 0 & f_x\,dx \end{vmatrix}$$

$$= i\left(f_x\,dx\,dy\right) + \vec j\left(f_y\,dy\,dx\right) + \vec k\left(-dx\,dy\right)$$

$$\vec r_1 = \vec B - \vec A = \left(0,\ \Delta y,\ \underbrace{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}_{\approx\, f_y(x,y)\,\Delta y}\right)$$

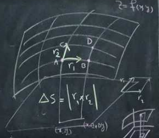
$$\vec r_2 = \vec C - \vec A = \left(\Delta x,\ 0,\ \underbrace{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}_{\approx\, f_x(x,y)\,\Delta x}\right)$$

$A = (x, y, f(x,y))$

$B = (x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y))$

$C = (x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y))$

$D = (x+\Delta x, y+\Delta y, f(x+\Delta x, y+\Delta y))$



مشابه مباحث قبل، برای تعریف این انتگرال باید
S را به قطعات به مساحت ΔS تقسیم کرد،
روی هر قطعه یک نقطه (x,y,z) انتخاب کرد و حاصل

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x,y,z)\,\Delta S$ را محاسبه کرد.

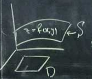
مثال: $\iint x^2\, dS$ را بیابید که در آن S سطح کره‌ی واحد است به مرکز مبدأ

$$\iint F(x,y,z)\, dS = \iint_{(x,y)\in D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\; dx\,dy$$

انتگرال یک تابع معمولی (دوگانه)

خلاصه

dS



$F(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$dS = |r_1\times r_2| = \sqrt{f_x^2(dx\,dy)^2 + f_y^2(dx\,dy)^2 + (dx\,dy)^2}$$

$$= \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\;dx\,dy = \underbrace{|\nabla f|\;dx\,dy}_{dS}$$

مساحت $= |r_1\times r_2|$

$$\iint x^2\, dS = \iint_{(x,y)\in D} x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\, r\,dr\,d\theta$$

نیم کره بالایی

$$dS = \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\, dx\,dy$$

$$f_x^2+f_y^2+1 = \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1$$

$$= \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2} + 1 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

روی نیمکره‌ی بالایی

$$S := z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

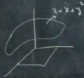
$$dS = \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\, dx\,dy$$

$G(x,y,z)$

$z = f(x,y)$

(x,y,z)

مثال: $\iint y\,dS$ را محاسبه کنید که در آن S رویه $z = x + y^2$ برای $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ است.



همین روند را برای نیمکره بالایی نیز تکرار کنید.

$$\iint x^2\,dS$$

$$\int_0^1 \frac{r^3\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta \cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta$$

تغییر متغیر

$r = \sin\theta$

$dr = \cos\theta\,d\theta$

$1 - r^2 \ge 0$

$r^2 \le 1$

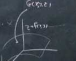
$-1 \le r \le 1$

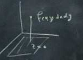
$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,(\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,\underbrace{(1-\cos^2\theta)\,d\theta}_{(u^2-1)\,du}$$

$$= \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} = \cdots$$

توجه: انتگرال روی رویه، تعمیمی از انتگرال دوگانه است.





حل مثال

$z=f(x,y)$

$$dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA=$$

$$\sqrt{1+1+4y^2}\,\frac{dA}{dxdy}=\sqrt{2+4y^2}\,dA$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{1+2y^2}\,dA$$

$$\iint_S y\,dS=\int_0^1\int_0^2 \sqrt{2}\,y\sqrt{1+2y^2}\,dy\,dx$$

$$\int_0^2 y\sqrt{\underbrace{1+2y^2}_{u}}\,dy=\int_1^9 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{4}\,du=A$$

$$\sqrt{2}\int_0^1 A\,dx=\sqrt{2}A$$

همین روند را برای نیمکره بالایی نیز تکرار کنید.

$$\iint x^2\,dS$$

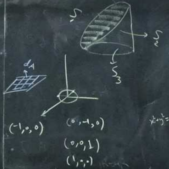
مثال

$\iint_S z\, dS$ را بیابید که در آن

S از زیر محدود به دیسک $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$

و از اطراف به استوانه $x^2+y^2=1$

از بالا به صفحه $z=1+x$ است



$x^2+y^2=1$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

پاسخ

$$\iint_{S_3} z\, dS = \iint_{(x,y)\in \dots} \cancel{z}\, dA = 0$$

روی S_3 داریم $z=0$

$$\iint_{S_1} z\, dS = \iint_{(x,y)\in x^2+y^2\le 1} \sqrt{2}(1+x)\, dx\, dy$$

$z = 1+x$

$dS = \sqrt{1+1}\, dA$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$= \dots$