انتگرال‌گیری

$\int_C f(x,y)\,ds$ از توابع عددی روی خم

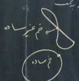
$\int_C F\cdot dr=\int_C P\,dx+Q\,dy$ از توابع برداری روی خم

$F(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$

قضیه گرین

Greens theorem

فرض کنید C یک خم ساده، بسته، هموار، جهت‌دار به سمت مثبت باشد و D ناحیه احاطه شده توسط C باشد.



جهت‌دار به سمت مثبت:
یعنی وقتی روی خم حرکت کنیم ناحیه احاطه شده توسط خم در سمت چپ ما قرار بگیرد

فرض کنید $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته در یک ناحیه باز شامل D باشند آنگاه

$$\oint_C F\cdot dr=\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dA$$

قضیه گرین

$F(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$

$$\boxed{\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy}$$

$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\boxed{\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy}$$

$$\int_{C = C_1 \cup C_2} P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P(x,y)\,dx + \int_{C_2} P(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)\,dy = P(x,y)\Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}$$

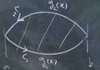
$$= P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))$$

$$\int_a^b \left(P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\right) dx$$

$$\| \qquad \iint_D P_y\,dA$$

$f = (P, Q)$

$$\iint_D P_y(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)\,dy\right) dx$$



$a \le x \le b$

$g_1(x) \le y \le g_2(x)$

توجه

انتگرالگیری از توابع برداری به جهت خم بستگی دارد.

$$\int_C F \cdot dr = -\int_{-C} F\,dr$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \dots$$

$$\int_0^{1-x} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx$$

$x \quad y$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

بنا به قضیه گرین

$Q_x = y$

$P_y = 0$

$F(x,y) = (x^4, xy)$

$= (P(x,y), Q(x,y))$

$\oint_C F\cdot dr$

مثال

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$$

را روی C، مرز مثلث زیر به سمت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

مثال

$$\oint_C \left(3y - e^{\sin x}\right)dx + \underbrace{\left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)}dy$$

را روی دایره $x^2+y^2=9$ حساب کنید.
(در خلاف جهت عقربه ها)

$$x^2+y^2=9$$

$$F(x,y) = \left(\underbrace{3y - e^{\sin x}}_{P}, \underbrace{7x+\sqrt{y^4+1}}_{Q}\right)$$

بنا به قضیه گرین

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

$$Q_x = 7$$

$$P_y = 3$$

$$\iint_D (4)\, dx\, dy$$

$= 4 \times$ مساحت دایره

$x \quad y$

مثال

$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$ را روی مرز ناحیه زیر محاسبه کنید.

$F(x,y) = (y^2, 3xy)$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D (3y-2y)\,dA$$

$$= \iint_D y\,dA =$$

$$\int_0^\pi \int_1^2 r\sin\theta \, \underbrace{r\,dr\,d\theta}$$

$$= \int_1^2 r^2\,dr \times \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta$$

نکته جالب

فرض‌های قضیه گرین:

C یک منحنی بسته ساده

P, Q مشتقات جزئی پیوسته در D داشته باشند.

قضیه گرین برای نواحی حفره‌دار نیز برقرار است.

ناحیه دارای حفره

[illegible]

$C = C_1 \cup C_2$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

به عنوان مثال فرض کنید $F = \nabla g = (g_x, g_y)$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint (g_{xy} - g_{xy})\, dA = 0$$

انتگرال تابع برداری پایستار روی مسیر بسته D صفر است. C

($F = \nabla g$ تابع برداری F را پایستار می‌نامیم هرگاه تابع عددی g پیدا شود به طوری که)

Conservative

نکته جالب

$F = (P, Q)$ به گونه‌ای باشد که $Q_x = P_y$

فرض کنید

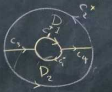
(در درون ناحیه D).

آنگاه $\oint_C F \cdot dr = 0$

$$\cancel{\int_{C_3} F \cdot dr} + \int_{C_1} F \cdot dr + \cancel{\int_{C_4} F \cdot dr} + \int_{C_2} F \cdot dr = \iint_{D_1} (Q_x - P_y)\, dA$$

$+ \qquad = \qquad +$

$$\cancel{\int_{-C_3} F \cdot dr} + \int_{C_1^-} F \cdot dr + \cancel{\int_{-C_4} F \cdot dr} + \int_{C_2^-} F \cdot dr = \iint_{D_2} (Q_x - P_y)\, dA$$

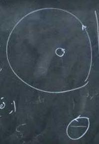


مثال

نشان دهید که روی هر خم بسته که ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن شامل مبدأ باشد

$$\oint_C F\cdot dr = 2\pi$$

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$



توجه: تابع F روی مبدأ تعریف نشده است.

بنابراین روی هر خم دلخواه C نمی‌توان

از قضیه گرین استفاده کرد

فرض کنید C یک خم دلخواه شامل مبدأ باشد.

هدف: اثبات اینکه:

$$\oint_C F\cdot dr = 2\pi$$

فرض کنید C_1 یک دایره به اندازه‌ی کافی بزرگ مانند شکل باشد

$$C_1 = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad r \text{ بزرگ}$$

بنا به قضیه گرین (روی ناحیه حفره‌دار)

$$\oint_{C_1} F\cdot dr - \oint_{C_2} F\cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA = 0$$

$$Q_x = P_y$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} F\cdot dr = \oint_{C_2} F\cdot dr$$

$$Q_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

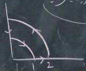
$$\oint_C \left(2y+\sqrt{4x^5}\right)dx + \left(5x-e^{y^5}\right)dy$$

$$C: x^2+y^2=4$$

حل

$$\oint_C xy^2\,dx - x^2y\,dy$$

C مرز ناحیه R



حل

$$\int F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-r\sin\theta}{r^2}(-r\sin\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\frac{(r\cos\theta)(r\cos\theta)}{r^2}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi$$

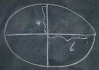
$$\int_{C_1} F\cdot dr$$

نیاز به تعمیم کار است

$$F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

را کامل کنیم

$$C_1=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$



$A = \pi ab$

$$\int_C -\frac{y}{2}\,dx + \frac{x}{2}\,dy = \text{مساحت بیضی} =$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{b\sin t}{2}(-a)\sin t\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{a\cos t\, b\cos t}{2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab\,dt}{2} = \pi ab$$

مثال

مساحت بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را بیابید.

$$C: \vec{r}(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D 1\,dA$$

هدف

مثال

$F = (0, x)$

$F = (-y, 0)$

$F = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

$F = (P, Q)$

$Q_x - P_y = 1$

توجه

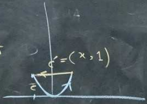
سوال

چگونه می‌توان از قضیه گرین برای محاسبه مساحت ناحیه D استفاده کرد؟

$$\int_{C\cup C'} F\cdot dr = \iint \underbrace{(Q_x - P_y)\,dA}_{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_C + \int_{C_1} \qquad \int_C = -\int_{C_1}$$



تمرین

$$\oint_C (1+xy^2)\,dx + x^2y\,dy$$

را محاسبه کنید که در آن C منحنی $y=x^2$ از $(-1,1)$ تا $(1,1)$ است. (با استفاده از گرین)