انتگرال گیری از توابع عددی روی مسیر

$w = f(x,y,z)$

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_t f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$

مثال جرم یک سیم با دانستن چگالی در هر نقطه

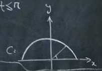
توجه انتگرال فوق از انتخاب پارامتر بندی خم و جهت آن مستقل است.

مثال

$$\int_C (2+x^2y)\,ds$$

را بیابید که در آن C نیمه بالایی دایره $x^2+y^2=1$.

$C = \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$



$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$|\vec{r}\,'(t)| = 1$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_0^\pi (2+\cos^2 t \sin t)\,dt = 2\pi + -\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^\pi = \cdots$$

توجه

برای محاسبهٔ طول خم $C: \vec{r}(t)$ از $t=a$ تا $t=b$ از انتگرال زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_C 1\,ds = \int_t |\vec{r}'(t)|\,dt$$

تمرین

① محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید.

محیط دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ را بیابید.

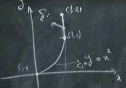
② طول منحنی تابع $y=f(x)$ را از نقطهٔ $x=a$ تا $x=b$ بیابید.

مثال

$\int_C 2x\,ds$ را بیابید که در آن $C=C_1\cup C_2$

C_1 خم $y=x^2$ از نقطهٔ $(0,0)$ تا $(1,1)$.

C_2 پاره‌خط قائم از $(1,1)$ تا $(1,2)$.



$C_1: \vec{r}(x)=(x,x^2)$

$0\le x\le 1$

$\vec{r}'(x)=(1,2x)$

$|\vec{r}'(x)|=\sqrt{1+4x^2}$

$$\int_{C_1} f\,ds=\int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5=\dots$$

$u=1+4x^2$

$du=8x\,dx$

$$\int_0^1 (2+5t)\, e^{1+3t} \sqrt{34}\, dt = \sqrt{34}\int_0^1 (2+5t)\, e^{3t}\, dt = \cdots$$

$r'(t) = (3,5)$

$|r'(t)| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$(1,2)$ $\vec{r}(t)$ $(4,7)$

بردار: $(3,5)$

$\vec{r}(t) = (1,2) + t(3,5)$

$= (1+3t,\ 2+5t)$

$0 \le t \le 1$

$ds = dx$

$y=1$

محاسبه کنید:

مثال

1) $\int_C y e^x\, ds$

① روی خط $y=x$ از $x=0$ تا $x=2$

② روی خط $y=1$ از $x=0$ تا $x=2$

③ روی پاره خط واصل نقاط $(4,7), (1,2)$

روی نمودار $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$

$\vec{r}(x) = (x, f(x))$

$a \le x \le b$

$\int_C 1\, ds = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

$r'(x) = (1, f'(x)) \Rightarrow |r'(x)| = \sqrt{1+(f'(x))^2}$

$C_2 : r_2(y) = (1, y) \quad 1 \le y \le 2$

$r_2'(y) = (0,1) \Rightarrow |r_2'(y)| = 1$

$\int_{C_2} f\, ds = \int_1^2 2\, dy = 2$

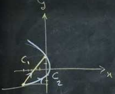
توجه: فرض کنید $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ، $a \le t \le b$ و $f(x,y,z)$ یک تابع باشد،

$$\int_C f(x,y,z)\, \underbrace{dx}_{\text{دقت}} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt$$

به جز ds!

به طور مشابه $\int_C f\, dy$ و $\int_C f\, dz$ نیز تعریف می‌شوند.

مثال: حاصل $\int_C y^2 dx + x dy$ را بیابید که در آن C پاره‌خط واصل $(-5,-3)$ و $(0,2)$ به همراه کمان $x = 4 - y^2$ از $(-5,-3)$ تا $(0,2)$ است.



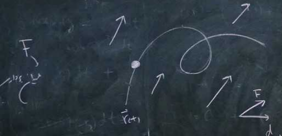
$C_1: \vec{r}(t) = (-5,-3) + t(-5,-5)$

$= (-5t-5, -5t-3)$

$-1 \le t \le 0$

$$\int_{C_1} y^2 dx + x dy =$$

$$\int_{-1}^{0} (-5t-3)^2 (-5)\, dt + \int_{-1}^{0} (-5t-5)(-5)\, dt = \dots$$



$|F||d|\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d}$

تمرین

$\int x e^{y}\,dx + x^{2} y\,dy$

(e^{t}, e^{t})

$-1 \le t \le 1$

(t, t)

تمرین

$\int_{C} yz\,dx + xz\,dy + xz\,dz$

$C: r(t) = (\cos t, \sin t, \tan t)$

$0 \le t \le \pi$

$\int_{C} y^{2}\,dx + x\,dy =$

$\int_{C_1} y^{2}\,dx + x\,dy + \int_{C_2} y^{2}\,dx + x\,dy$

$C_2: (4 - t^{2}, t) \quad -3 \le t \le 2$

$\int_{C_2} y^{2}\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{+2} t^{2}(-2t)\,dt + \int_{-3}^{2} (4 - t^{2})\,dt = \dots$

میدان‌های برداری

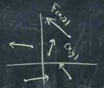
منظور از یک میدان برداری تابعی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ یا از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ است.

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$(x,y)\mapsto\big(P(x,y),\,Q(x,y)\big)$$

$$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$



مثال: میدان برداری

$$\vec{F}(x,y)=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}$$

را رسم کنید.

$$F(x,y)\cdot(x,y)=(-y,x)\cdot(x,y)=0$$

تمرین: میدان برداری ∇f برای تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ را رسم کنید.

$$\nabla f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$(x(t), y(t))$

$C: \vec{r}(t) \quad a \le t \le b$

فرض کنید

$$\int_C (F\cdot T)\,ds = \int_a^b \left(F(x(t), y(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|}\right)|r'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b \left(F(\vec{r}(t)) \cdot r'(t)\right)dt = \int_a^b P\,dx + Q\,dy$$

$(P(x,y), Q(x,y)) \quad (x'(t), y'(t))$

کار انجام شده:

$$\int_C (F\cdot T)\,ds$$

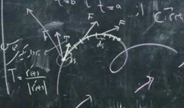
کار انجام شده را محاسبه کنید.

$$|F||d|\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

سوال

فرض کنید جسمی تحت میدان نیروی $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ از روی خم $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ از $t=a$ تا $t=b$ جابجا شود.

$(F\cdot T)\,ds$



$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

یادآوری

بردار گرادیان بر منحنی‌های تراز عمود است.

$y - x^2 = 1$

تعریف

فرض کنید $F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ یک میدان برداری باشد و

$C : \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$

یک خم هموار باشد

تعریف می‌کنیم

$$\int_C F\cdot dr = \int_C F\cdot \vec{ds} \qquad \vec{ds} = ds\,\vec{T}$$

$$= \int_C (F\cdot T)\, ds =$$

کوچک

$$\int_t P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

مثال

کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x,y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$$

برای جابجایی ذره‌ای روی دایره

$(\cos t, \sin t)$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

را حساب کنید.

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \qquad F = (P, Q)$$

کار انجام شده:

$$= \int_C F\cdot\vec{ds} =$$

$$\int_C x^2\,dx - xy\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t(-\sin t)\,dt - \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t)\cos t\,dt$$

$x = \cos t$

$y = \sin t$

$dx = -\sin t\,dt$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_0^1 t\,t^2 \cdot dt + \int_0^1 t^5\, 2t\,dt + \int_0^1 t^4\, 3t^2\,dt$$

مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_C F \cdot dr$$

مثال

اگر

$$F(x,y,z) = \overset{P}{xy}\,\vec{i} + \overset{Q}{yz}\,\vec{j} + \overset{R}{zx}\,\vec{k}$$

و

$$C: \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$$

$$0 \le t \le 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t)\,dt = \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

انتگرال بعدی نیز دقیقاً همین است.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon}$$

قضیه گرین

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

فرض کنید که $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

یک تابع برداری باشد

هدف می‌باشد؟

$$\oint_C F.dr = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

قطعه قطعه هموار

$C = \vec{r}(t)$

بسته

خم ساده

خودش را تنها در یک نقطه قطع می‌کند

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$