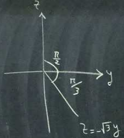
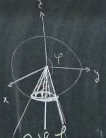
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \rho \le 6$





θ, φ, ρ

مثال: $\iiint_E x^2\,dV$ را بیابید که در آن

E ناحیه بالای کره $x^2+y^2+z^2=36$

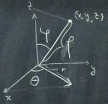
و داخل مخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ است.

$z=\rho\cos\varphi$

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$

$dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$



$r=$

$$= \int_0^{6} \rho^4 \, d\rho \times \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi \times \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\int \sin^3\theta \, d\theta = \int \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta \qquad \int \cos^2\theta \, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta$$

$$\int (1-u^2) \, du$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \int_0^{6} \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

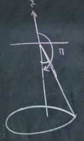
$\theta \quad \varphi \quad \rho$

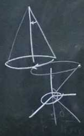
$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$

مثال $\iiint_E x^2 \, dV$ را بیابید که در آن

E: ناحیه بالای کره $x^2+y^2+z^2=36$

و داخل مخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ است.





را حساب کنید.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{6x^2+6y^2}}^{\sqrt{7-x^2-y^2}} 18y\ dz\,dy\,dx$$

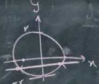
$x \qquad y \qquad z$

حل

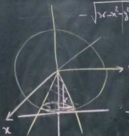
استوانه‌ای

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_{-\sqrt{36-r^2}}^{-\sqrt{3}\,r}$$

$x^2+y^2=r^2$



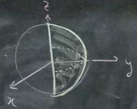
حل



$-\sqrt{36-x^2-y^2} \le z \le -\sqrt{3x^2+3y^2}$

$-r \le y \le r$

$-\sqrt{r^2-y^2} \le x \le +\sqrt{r^2-y^2}$



تمرین مثال قبل را با مختصات استوانه‌ای حل کنید.

مثال

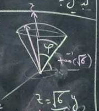
$$\iiint_E y^2\,dV$$ را بیابید که در آن E ناحیه‌ی [illegible] است.

$x^2+y^2+z^2 \le 8$ و $y \ge 0$

تبدیل به مختصات کروی

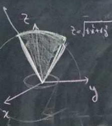
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(\sqrt6)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt7} 18\rho\sin\varphi\sin\theta \times \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$= \dots$

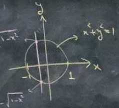


$z=\sqrt6\,y$

$x^2+y^2+z^2=7$



$z=\sqrt{6x^2+6y^2}$



$\sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2}$

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=1$

در مختصات کروی

$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \rho \le \sqrt{6}$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\;\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$\theta \quad \varphi \quad \rho$

$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

$$= \int_0^{\sqrt{6}} \rho^4\,d\rho \times \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,d\varphi \times \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \dots$$

استوانه‌ای

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le r \le \sqrt{6}$

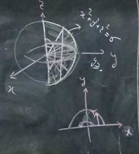
$-\sqrt{6-r^2} \le z \le +\sqrt{6-r^2}$

مختصات دکارتی

$-\sqrt{6} \le x \le +\sqrt{6}$

$0 \le y \le \sqrt{6-x^2}$

$-\sqrt{6-x^2-y^2} \le z \le +\sqrt{6-x^2-y^2}$



تمرین

حاصل $\iiint_E \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ را بیابید که در آن E درون کره $x^2+y^2+z^2=1$ است.

تمرین ⊛

حجم ناحیه مشترک بین کره $x^2+y^2+z^2=4z-3$ و مخروط $z^2=4(x^2+y^2)$ را بیابید.

تمرین

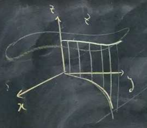
$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

تمرین

$\iiint_E zx\,dV$ را محاسبه کنید که در آن E بالای کره $x^2+y^2+z^2=4$ و درون مخروطی است که با قسمت منفی محور z زاویه $\frac{\pi}{3}$ می‌سازد و $x\le 0$.

تمرین

$\iiint_E 16z\,dV$ را بیابید که در آن E نیمه بالایی کره $x^2+y^2+z^2=1$ است.



فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع عددی باشد.

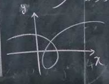
$z = f(x,y)$

هدف: تعریف $\int_C f(x,y)\, ds$

$a \leq t \leq b$

فرض کنید $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ یک خم هموار در صفحه xy باشد.

$|\vec{r}'(t)| \neq 0$



(ادامه)

انتگرال‌گیری روی خم → توابع عددی / توابع برداری

انتگرال‌گیری روی یک سطح → توابع عددی / توابع برداری

قضیه گرین

قضیه استوکس

قضیه دیورژانس

$\iint$ انتگرال دوگانه → مختصات عادی / قطبی

$\iiint$ انتگرال سه‌گانه → استوانه‌ای / کروی

(توابع عددی)

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int f\underbrace{(x(t),y(t))}_{\text{پارامتر}}\,|r'(t)|\,dt$$

$$a \le t \le b$$

$$= \int_{t} f(\vec r(t))\,|r'(t)|\,dt$$

$$\vec r = (x(t), y(t))$$

$$\downarrow$$

$$\vec r' = (x'(t), y'(t))$$

$$|r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

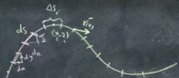
$dx = x'(t)\,dt$

$x = x(t)$

$y = y(t)$

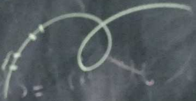
$$ds = \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\;dt$$

$$ds = |r'(t)|\,dt$$



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i \;\underset{\text{اگر موجود باشد}}{=\!=}\; \int_C f(x,y)\,ds$$

$$= \int_t f(\vec{r}(t))\, |\dot{r}(t)|\, dt$$



اگر $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ به طور مناسب

یک تابع $f(x,y,z)$ که هم [illegible] باشد و

سه متغیره باشد

$$\int_C f(x,y,z)\, ds := \int_t f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$