چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

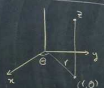
۸-۹ تا لار ۳

۹-۱۰ تا لار ۵

حل تمرین [illegible] دوم

ساعت ۱۲-۱۱ هر روز تا لار ۳

۱- مختصات استوانه ای



$$\iiint f(x,y,z)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

(r,θ,z)

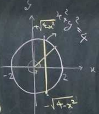
$dV = dz \cdot dr \cdot r\,d\theta$

$= r\,dr\,d\theta\,dz$

مثال حاصل انتگرال زیر را حساب کنید

$$\underbrace{\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}}_{D} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$$

$x \quad y \quad z$



$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r}^{2} r^2 \, r \, dz\,dr\,d\theta$$

$\theta \quad r \quad z$

$$\int_r^2 r^3\,dz = r^3 \int_r^2 dz = r^3(2-r)$$

$$\int_0^2 r^3(2-r)\,dr = \int_0^2 (2r^3 - r^4)\,dr = \frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = A$$

حاصل نهایی $= 2\pi A$

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

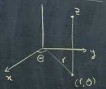
۸-۹ تا لار ۳

۹-۱۰ تا لار ۵

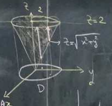
حل تمرین در زمان کوئیز دوم

ساعت ۱۲-۱۳ هر روز تا لار ۳

مختصات ۱- استوانه ای



مثال   حل $\iiint_T x^2 y^2 \, dV$ را بیابید که در آن T محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=2$ است.



$$= \iint_{(x,y)\in D} \int f \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_r^{2} r^2\cos^2\theta \, r^2\sin^2\theta \, r \, dz\, dr\, d\theta$$

$$\cos^2\theta \sin^2\theta \, r^5 \int_r^2 dz = \cos^2\theta \sin^2\theta \, r^5 (2-r)$$

$$\cos^2\theta \sin^2\theta \int_0^2 r^5 (2-r)\, dr = \underbrace{\left(\int_0^2 (2r^5 - r^6)\, dr\right)}_{A} \times \cos^2\theta \sin^2\theta$$

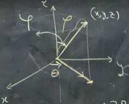
$$A \times \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta = A \int_0^{2\pi} (\cos\theta \sin\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

ρ

φ

θ

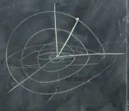


$0 \le \theta \le 2\pi$

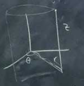
$0 \le \rho < \infty$

$0 \le \varphi \le \pi$

مختصات کروی



استوانه‌ای



$dv = r\,dr\,d\theta\,dz$

$\int \sin^2(2\theta)\,d\theta =$

راهنمایی

$\int \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = \dots$

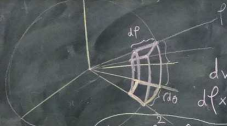
چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

۸- ۹ تا لار ۳

۹- ۱۰ تا لار ۵

حل تمرین درس ریاضی عمومی دوم

ساعت ۱۲-۱۴ هر روز تا لار ۳



$dV = d\rho \times \rho\sin\varphi\, d\theta \times \rho\, d\varphi$

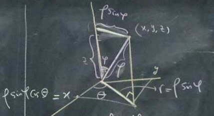
$$dV = \rho^2 \sin\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$dV = ?$

$x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta$



$z = \rho\cos\varphi$

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

۸-۹ تالار ۳

۹-۱۰ تالار ۵

حل تمرین ریاضی گروه دوم

ساعت ۱۲-۱۴ هر روز تالار ۳

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت
۸-۹ تالار ۳
۹-۱۰ تالار ۵

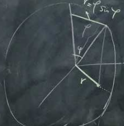
حل تمرین ریاضی کوثر دوم
ساعت ۱۲-۱۳ هر دو تالار ۳

مثال

رویه $\theta = c$ را در مختصات کروی رسم کنید.

مثال

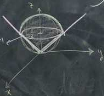
ناحیه $0<\varphi<\pi/2$ را رسم کنید.



مثال

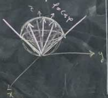
حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و زیر کره $x^2+y^2+z^2=z$ واقع شده است.

$$x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$



این دایره روی مخروط نیز واقع است

$$\int_0^{2\pi} A\,d\theta = 2\pi A$$



$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{\cos^4\varphi}{12}\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{12} = A$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$\theta \quad \varphi \quad \rho$

حجم ناحیه = $\iiint dv$

$$\sin\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\cos\varphi}$$

$$= \sin\varphi \frac{\cos^3\varphi}{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

$$\rho^2 = \rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \rho = \cos\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq \cos\varphi$$

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

۸-۹ تالار ۳

۹-۱۰ تالار ۵

حل تمرین درس ریاضی عمومی دوم

ساعت ۱۲-۱۳ هر روز تالار ۳

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

۸- ۹ تالار ۳

۹- ۱۰ تالار ۵

حل تمرین در زمین کوثر دوم

ساعت ۱۲-۱۳ هر روز تالار ۳

تمرین: مثال قبل را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حل کنید.

مثال $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\, dV$ را محاسبه کنید که در آن T ناحیه‌ی بین دو کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=e$ است.

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

$1 \le \rho \le \sqrt{e}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{\rho^3}\,\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$\theta \quad \varphi \quad \rho$

از آنجا که حدود انتگرالها عدد است و هر عبارت تنها تابعی از یک متغیر است

$$= \underbrace{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{\rho}\, d\rho}_{A} \times \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$-\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 1+1 = 2$

2π

$A = \ln\rho \Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$

چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

۸-۹ تالار ۳

۹-۱۰ تالار ۵

حل تمرین درس ریاضی گروه دوم

ساعت ۱۲-۱۳ هر روز تالار ۳

مثال

حجم ناحیه محدود بین کره‌ها و بالای مخروط را بیابید.

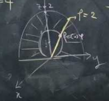
$x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$x^2+y^2+z^2=z$

$x^2+y^2+z^2=4$

$\rho^2=\rho\cos\varphi$

$\rho=\cos\varphi$



$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$0\le\theta\le 2\pi$

$\cos\varphi\le\rho\le 2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\varphi}^{2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\dots$$

θ ، φ ، ρ

مثال

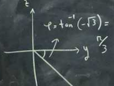
$\iiint_E x^2\,dV$ را بیابید

که E ناحیه بالای کره $x^2+y^2+z^2=36$

$z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$ درون مخروط

تا داخل مخروط با کره

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\pi$



$\varphi=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\pi/3$