$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r^2}^{4} r^2\,dy\,dr\,d\theta =$$

$\theta \quad r$

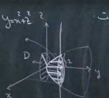
$$\int_{r^2}^{4} r^2\,dy = r^2 y\Big|_{r^2}^{4} = 4r^2 - r^4$$

$$\iint_{(x,z)\in D}\int_{x^2+z^2}^{4}\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)dy\,dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r^2}^{4} r\,dy\,r\,dr\,d\theta =$$

$\theta \quad r \quad z$

$y=x^2+z^2$ و صفحه $y=4$ است.



تمرین $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(xy+yz+xz)\,dx\,dy\,dz$

مثال حاصل $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV$ را محاسبه کنید

که در آن E ناحیه محدود به رویه $y=x^2+z^2$

نحوه اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸- ۹ (سه‌شنبه ۱۲۵)

تالار ۳

بدون استفاده از تغییر متغیر قطبی:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+z^2}^{4}\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)dy\,dz\,dx$$

x z y

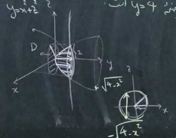
$$\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy=\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)\left(4-x^2-z^2\right)\longrightarrow$$

محاسبه انتگرال دوم مشکل است.

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)d\theta$$

$$=2\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right).$$

و صفحه y=4 است.



$$\int_{0}^{2}\left(4r^2-r^4\right)dr=$$

$$\frac{4}{3}r^3-\frac{r^5}{5}\Big|_0^2=$$

$$\left(\frac{4\times8}{3}-\frac{32}{5}\right)$$

نحوه اعتراض به نمرات

میانترم ← در گلستان

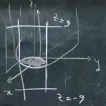
نوشته شده است.

(شنبه ۲۵ آذر) ۹ - ۸

تالار ۳

حجم ناحیه E

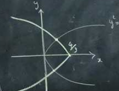
$$\iiint_E 1 \cdot dV$$

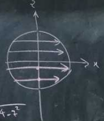


تمرین ۳

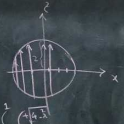
۱۲

مثال: حجم ناحیه محدود به استوانه $y^2=4-3x$ و $y^2=x$، صفحات $z=9$ و $z=-9$ را بیابید.





$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}$$

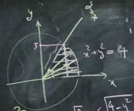


$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}$$

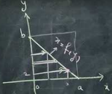
نحوه اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸- ۹ (۱۲۵ [illegible])

تالار ۳

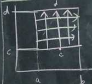


$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2 = \int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}$$



$$\int_0^b\int_0^{f(y)}$$

$$\int_{-1}^{1} 18\left(\frac{y^2-4}{-3}-y^2\right)dy = \dots$$



$$\int_a^b\int_c^d \text{—}$$

$$\int_c^d\int_a^b \text{—}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{\frac{y^2-4}{-3}} 18\,dx\,dy = $$

$$4-3x = x \Rightarrow x=1$$

$$18x\Big|_{y^2}^{\frac{y^2-4}{-3}}$$

$$= \iint_{(x,y)}\int_{-9}^{9} dz\,dx\,dy$$

$$= \iint_{(x,y)} 18\,dx\,dy =$$

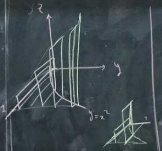
نحوهٔ اعتراض به نمرات
میانترم ← در گلستان
نوشته شده است.

(شنبه ۲۱/۲۵) ۹ - ۸
تالار ۳

مثال $\iiint_T z\,dV$ را بیابید که در آن T ناحیهٔ بالای صفحهٔ xy $(z>0)$ نیمه بالای کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ است.

سوال ناحیهٔ انتگرال‌گیری زیر را رسم کنید.

$$\int_0^1\int_0^{z^2}\int_0^{y} dx\,dy\,dz$$



تمرین

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{y} dz\,dy\,dx = \int_?^?\int_?^?\int_?^? dx\,dz\,dy$$

نحوهٔ اعتراض به نمرات میان‌ترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸- ۹ (۱۲۵ [illegible])
تالار ۳

مثال: $\iiint_T z\,dV$ را بیابید که در آن T نیمه بالای $x^2+y^2+z^2=1$ است.

صفحه xy نیمه بالا کره ($z>0$)

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

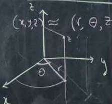
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = z$

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

مختصات استوانه‌ای

$(x,y,z) \approx (r,\theta,z)$



$$\iint_{(x,y)}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\right)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

ادامه را خودتان حل کنید

نحوه اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸-۹ (۲۵ اردیبهشت)
تالار ۳

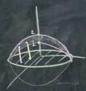
تمرین

حجم ناحیه بین کره $x^2+y^2+z^2=4$ و سهمی گون $x^2+y^2=4(1-z)$ را بیابید.

$r^2 = 4-4z$

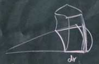
$z = \frac{r^2-4}{-4}$

$dv = r\,dr\,d\theta\,dz$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} \underbrace{r\,dz\,dr\,d\theta}_{dv}$$

$$2\pi\int_0^1 \frac{r(1-r^2)}{2}\,dr = \ldots$$



$dv = r\,dz\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{\sqrt{1-r^2}} rz\,dz =$$

$$r\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-r^2}} = \frac{r(1-r^2)}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

نحوه اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

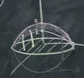
۸- ۹ (۲۱۲۵ شنبه)

تالار ۳

تمرین: حجم ناحیه بین کره $x^2+y^2+z^2=4$ و سهمی گون $x^2+y^2=4(1-z)$ و بالای صفحه‌ی xy را بیابید.

$r^2=4-4z$

$z=\frac{r^2-4}{-4}$



$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} \underbrace{r\,dz\,dr\,d\theta}_{dV}$$

$$2\pi\int_0^1 \frac{r(1-r^2)}{2}\,dr = \dots$$

$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

$$\int_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz = rz\Big|_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} = r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{4-r^2}{4}\right)$$

$$\int_0^2 r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{4-r^2}{4}\right)dr =$$

$u=4-r^2 \rightarrow du=-2r\,dr$

$$\int_4^0 \frac{\sqrt{u}\,du}{-2} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{-2}\Big|_4^0 = \frac{\sqrt{64}}{3}$$

$$\int_0^2 \left(r-\frac{r^3}{4}\right)dr = \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{16}\right)\Big|_0^2 = 1$$

حجم مورد نظر $= 2\pi\left(\frac{\sqrt{64}}{3}-1\right)$

نحوه اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸- ۹ (۱۲۵ ...)

تالار ۳

تمرین

$$\iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dA$$

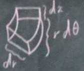
ناحیه D: $1 \le x^2+y^2 \le 4$,

$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x$

تمرین

الف) مساحت محصور بین منحنی‌ها $xy=1$, $xy=2$, $x=1$, $x=2$ را بیابید.

ب) مساحت ناحیه محدود به نمودار $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $x=0$ را بیابید.



$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

نحوهٔ اعتراض به نمرات میانترم ← در گلستان نوشته شده است.

۸ - ۹ (۱۲۵ ...)

تالار ۳