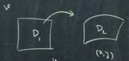
کوئیز دوم تا اول

انتگرال سه‌گانه

$x = x(u,v)$ $\quad (u,v)\in D_1$

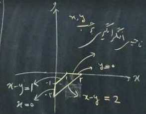
$y = y(u,v)$



$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\times\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

مثال: حاصل $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dA$ را بیابید که R ذوزنقه بین نقاط $(1,0)$، $(2,0)$، $(0,-1)$، $(0,-2)$ است.

ناحیه انتگرال‌گیری بر حسب x, y



تغییر متغیر:

$u = x - y$

$v = x + y$

$\Rightarrow 2x = u + v$

$x = \frac{u+v}{2}$

$y = \frac{v-u}{2}$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} =$$

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}$

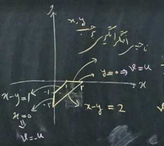
$$\int_{1}^{2}\int_{-u}^{u}\left(e^{\frac{v}{u}}\right)\frac{1}{2}\,dv\,du$$

$u \quad v$

$$\frac{1}{2}\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,dv=\frac{u}{2}e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}=$$

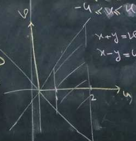
$$\frac{u}{2}\left(e^{1}-e^{-1}\right)$$

$$\int_{1}^{2}\frac{u}{2}\left(e^{1}-e^{-1}\right)du=\frac{u^{2}}{4}\left(e^{1}-e^{-1}\right)\Big|_{1}^{2}=\left(e^{1}-e^{-1}\right)-\left(\frac{1}{4}\left(e^{1}-e^{-1}\right)\right)$$



ناحیه R

بر حسب v,u



$$\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)\times\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$f(x,y)=e^{\frac{x+y}{x-y}}$$

در ادامه حدود انتگرال را مشخص کردیم.

انتگرال‌های دوگانه

کوئیز دوم تا اول
انتگرال سه گانه

مثال: $\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y}\, dA$ را حساب کنید که در آن D ناحیه احاطه شده توسط منحنی‌ها

$y^2 = x$

$y^2 = \frac{x}{2}$

$x^2 = \pi y$

$x^2 = \frac{\pi y}{2}$

است.

$$u = \frac{y^2}{x} \qquad \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

$$v = \frac{x^2}{y} \qquad \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$$

$$x = \frac{y^2}{u} \Longrightarrow v = \frac{\frac{y^4}{u^2}}{y} = \frac{y^3}{u^2}$$

$$y^3 = vu^2 \quad \begin{cases} y = v^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}} \\ x = \dfrac{uv}{y} = v^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}} \end{cases} \qquad y = v^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{uv = xy} \Leftarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{3} v^{\frac{2}{3}} u^{-\frac{2}{3}} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2}{3} v^{\frac{1}{3}} u^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |\det()| = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} v \sin(uv) \times \frac{1}{3}\, du\, dv$$

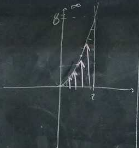
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} v \sin uv\, du = -\cos uv \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\cos v + \cos \frac{v}{2}$$

$$\int 2 \sin(2u)\, du$$

$$\int_0^2\int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy\,dx$$

$$\int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy = y e^{x^4}\Big]_0^{x^3} = x^3 e^{x^4}$$

$$\int_0^2 x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4} e^{x^4}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}e^{16} - \frac{1}{4}$$



حل

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy$$

y x

$= ?$

$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = x^3$

تمرین

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$$

را بیابید که در آن D ناحیه محصور به خطوط

است. 1 $x+y=2$, $y=0$, $x=0$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\frac{r}{2} - \cos r\,dr$$

$$\frac{2\sin\frac{r}{2} - \sin r}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

کوئیز دوم تا اول

انتگرال سه گانه

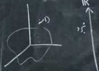
۲۳ اردیبهشت

ساعت ۱۷

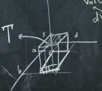
کوئیز دوم تا اول انتگرال سه‌گانه
۲۳ اردیبهشت
ساعت ۱۷

انتگرال سه‌گانه

فرض کنید $w=f(x,y,z)$ تابعی $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ باشد.



فرض کنید $T=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ یک ناحیه مکعبی در $\mathbb{R}^3$ باشد.



اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le(i,j,k)\le n} f\left((x^*,y^*,z^*)_{ijk}\right) dv$$

موجود باشد تابع f را روی ناحیه T انتگرال‌پذیر نامیم و حاصل عدد بالا را با

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv$$

توجه (در ناحیه مکعبی T)

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_r^s f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_y\int_x\int_z \qquad =\iiint_{0\,0\,0}$$

کوئیز دوم تا اول
انتگرال سه گانه
۲۳ اردیبهشت
ساعت ۱۷

اگر T یک ناحیه دلخواه باشد

آن گاه $\iiint_T f\,dV$ با استفاده از مکعب مستطیل T

R که ناحیه T را

تعریف می‌شود کردن آن

$\iiint_R F\,dV$

مکعب R

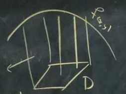
$$F(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z)\in T \\ 0 & (x,y,z)\in R-T \end{cases}$$

یعنی اگر $\iiint_R F\,dV$ وجود داشته باشد

مقدار آن را برابر با $\iiint_T f\,dV$ توقیع می‌کنیم.

$$\iint_D 1\,dA = \text{مساحت ناحیه } D$$

$$\iiint_T 1\,dV = \text{حجم ناحیه } T$$



$\iint_D f(x,y)\,dA \to$ حجم زیر f

کوئیز دوم تا اول انتگرال سه گانه

۲۳ اردیبهشت

ساعت ۱۷

مثال

$\iiint_B xyz^2\,dv$ را بیابید که در آن

$$\begin{cases} 0 \le z \le 3 \\ 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$$

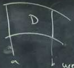
$$\iiint_B xyz^2\,dv = \int_0^3 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 xyz^2\,dx \right) dy \right) dz =$$

$$\int_0^1 xyz^2\,dx = yz^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{yz^2}{2}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy = \frac{z^2}{2}\int_{-1}^2 y\,dy = \frac{z^2}{2}\,\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^2 = \frac{z^2}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^3 \frac{z^2}{2}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)dz = \frac{3}{2}\times\frac{z^3}{6}\Big|_0^3 = \cdots$$

$D =$



$a \le x \le b$

$g_1(x) \le y \le g_2(x)$

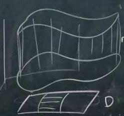
$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$x \quad y \quad z$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_{(x,y)\in D} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

$\iiint_T f(x,y,z)\,dV$

نواحی ساده تر



چگالی در نقطه (x,y,z)

جرم جسم $= \iiint_{\text{جسم}} \rho(x,y,z)\,dV$

کوئیز دوم تا اول

انتگرال سه گانه

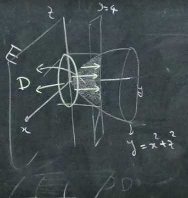
۲۳ اردیبهشت

ساعت ۱۷

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\, dV =$$

$$= \iint_D \int_{x^2+z^2}^{4} \, dy \, dA$$

$= y$



مثال

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\, dV$$

را محاسبه کنید که در آن E ناحیه محدود به رویه $y=x^2+z^2$ و صفحه $y=4$ است.

کوئیز دوم تا اول
انتگرال سه گانه
۲۳ اردیبهشت
ساعت ۱۷