حل تمرین دوره‌ای کوئیز ۲

↓ تارنمای دستیاران آموزشی

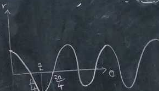
مختصات قطبی (تغییر متغیر قطبی)

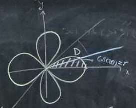
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

مثال

مساحت ناحیه محدود به گل $r = \cos(2\theta)$ را بیابید

$0 \le \theta \le 2\pi$





مساحت کل ناحیه احاطه شده = $8 \times$ D مساحت

مساحت ناحیه D:

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos(2\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$dA = r\,dr\,d\theta$

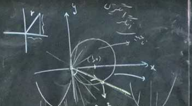
$$\int_0^{\cos(2\theta)} r\,dr = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos(2\theta)} = \frac{\cos^2(2\theta)}{2}$$

هدف محاسبه

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$$

θ



$x^2+y^2=2x$

$r^2=2r\cos\theta$

$r=2\cos\theta$

مثال

حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی وار $z=x^2+y^2$ و بالای صفحه xy داخل استوانه $x^2+y^2=2x$ واقع شده است.

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(2\theta)}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(4\theta)}{4}\,d\theta = \dots$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

حل تمرین دیگر کوییز ۲

در تارنمای دستیاران آموزشی

یادآوری از ریاضی ۱

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$$x = g(t) \quad \begin{cases} g(t_0) = a \\ g(t_1) = b \end{cases}$$

تغییر متغیر

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta =$$

$$\int \cos^4\theta\,d\theta = \int (\cos^2\theta)^2\,d\theta = \int \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \dots$$

$$\int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr = \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta}$$

$$= 4\cos^4\theta$$

حل تمرین دوره‌ی کوئیز ۲

کارهای دستیاران آموزشی

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

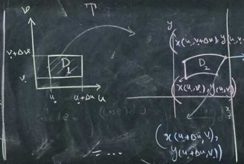
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$dx\,dy \simeq \left| \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| dr\,d\theta =$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

قدر مطلق (دترمینان)

$$\iint_{D_1} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$



$= \dots$

هدف: محاسبه $\iint f(x,y)\,dx\,dy$

با تغییر متغیر:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

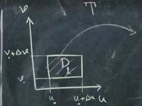
حل تمرین درس ۲ کوئیز ۲

کارهای دستیاران آموزشی

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du\, dv$$

$$\iint f(x,y)\, dA = \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



$$= \ldots$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$r_1 = \Big(\overbrace{x(u+\Delta u, v) - x(u,v)}^{\frac{\partial x}{\partial u} du}, \; \underbrace{y(u+\Delta u, v) - y(u,v)}_{\frac{\partial y}{\partial u} du} \Big)$$

$$r_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du \right)$$

$$r_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$$

$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \dots$$

$$r_2 = \big(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v) \big) - \big(x(u,v), y(u,v) \big)$$

$$r_1 \approx (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \big(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v) \big) - \big(x(u,v), y(u,v) \big) = \dots$$