مثال: حاصل انتگرال دوگانه زیر را بیابید.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_1^2 \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\,dy + \int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\,dy$$

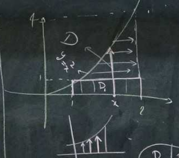
D_1, D_2

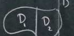
$$\int_1^2 \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$\int_0^1 \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dy$$

$x=\sqrt{y}$

توجه





$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

D: تغییر ترتیب انتگرال‌گیری

$$\int_1^2\int_0^{x^2} \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dy\,dx$$

$$\int_0^{x^2} \frac{y}{x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dy = \frac{y^2}{2x^4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big]_0^{x^2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\times -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\times\frac{2}{\pi}\Big]_1^2 = -\frac{1}{\pi}(-1-0) = \frac{1}{\pi}$$

تمرین

$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\, dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ است.

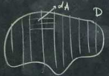
ویژگی‌های انتگرال دوگانه

① $\iint_D \left(c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\right) dA = c_1 \iint_D f(x,y)\, dA + c_2 \iint_D g(x,y)\, dA$

② $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dA \geq \iint_D g(x,y)\, dA$

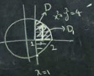
③ $\iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA = \iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\, dA$

④ $\iint_D 1\, dA =$ مساحت ناحیه D



مثال

مساحت داخل دایره $x^2+y^2=4$ و سمت راست خط $x=1$ را بیابید.



هدف: محاسبه $\displaystyle\iint_D 1 \cdot dA$

$$= 2\iint_{D_1} 1 \cdot dA$$

توجه

$$\iint_D f(x,y)\,dA \neq 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dA$$

$$\iint_{D_1} 1 \cdot dA = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\,dx$$

$x \quad y$

$$= \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$\Downarrow$

$x = a\sin\theta$

$dx = a\cos\theta$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \dots$$

تمرین

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\,dy\,dx = ?$$

تمرین

مساحت محصور بین منحنی‌ها $x=y^2$, $x=4-3y^2$ را بیابید (با انتگرال دوگانه)

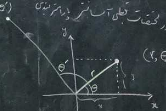
مختصات قطبی

توجه برخی نواحی در مختصات قطبی آسانتر پارامتر بندی می‌شوند :

(r, θ)

$0 \le r < \infty$

$0 \le \theta \le 2\pi$



رابطه با مختصات دکارتی :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

مستطیل قطبی :

$$D = \{(r,\theta) \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2 ,\ r_1 \le r \le r_2\}$$

مساحت D :

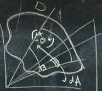
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} \boxed{}\, dA$$

توضیح داده می‌شود

$$\iint_D dA = \iint_{(r,\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$dA = dx\,dy$

$\overset{\text{مختصات قطبی}}{=} r\,dr\,d\theta$



$$\iint_D dA$$

$r^* = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$

$\Delta A = \frac{1}{2}\Delta\theta\,(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$

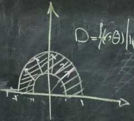
$= \Delta\theta\,\Delta r\,r^*$

$\dfrac{\text{مساحت}}{\text{زاویه}} = \dfrac{\pi r^2}{2\pi} = \dfrac{P_1 \text{ مساحت}}{\theta}$

$\text{مساحت} = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)(r_2^2 - r_1^2)$

محاسبه مساحت ناحیه D:

$P_1 \text{ مساحت} = \dfrac{\pi r^2\theta}{2\pi} = \dfrac{r_1^2}{2}\theta$



$D = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$

$x^2+y^2=1$

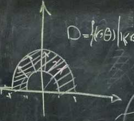
مثال حاصل $\iint_R (3x+4y^2)\,dA$ را بیابید که در آن R ناحیه بین دایره‌ها $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$، و بالای محور مختصات است.

تغییر متغیر قطبی

$$\iint_{\underset{(x,y)}{D}} f(x,y)\underbrace{dx\,dy}_{dA} = \iint_{\underset{(r,\theta)}{D}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}$$

تقریباً مستطیل

$r\,dr\,d\theta \approx dx\,dy$



$D=\{(r,\theta)\mid ۱\le r\le ۲,\ ۰\le\theta\le\pi\}$

$$A=\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{\pi} ۴r^{۳}\sin^{۲}\theta\, d\theta\, dr$$

$$A=\underbrace{\left(\int_{۱}^{۲} ۴r^{۳}\,dr\right)}_{۱۵}\times\left(\int_{۰}^{\pi} \underbrace{\sin^{۲}\theta}_{\frac{1-\cos ۲\theta}{۲}}\, d\theta\right)$$

$$=۱۵\times\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\dots$$

$$B=\underbrace{\left(\int_{۱}^{۲} ۳r^{۲}\,dr\right)}_{۷}\times\underbrace{\left(\int_{۰}^{\pi}\cos\theta\right)}_{0}$$

$$B=0$$

$$\iint f(x)g(y)\,dx\,dy=\int f(x)\,dx\times\int g(y)\,dy$$

$$\iint_R (۳x+۴y^{۲})\,dA=\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{\pi}\left(۳(r\cos\theta)+۴(r^{۲}\sin^{۲}\theta)\right)\underbrace{r\,d\theta\,dr}_{dA}$$

محاسبهٔ انتگرال اول

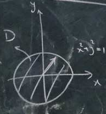
$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\pi}(3r\cos\theta)\,r\,d\theta\,dr=$$

$$B=\int_{1}^{2}\int_{0}^{\pi}3r^{2}\cos\theta\,d\theta\,dr=$$

مثال حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه $z=0$ و سهمی‌وار $z=1-x^2-y^2$ احاطه شده است.

ناحیه انتگرال‌گیری

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$



هدف محاسبه $\iint_D f(x,y)\, dA$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\theta} \underbrace{\int_0^1}_{r} 1\times(1-r^2)\, \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA} =$$

$$= 2\pi \times \int_0^1 r(1-r^2)\, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \right) = \cdots$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \pi/2 \times \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr = \pi/2 \times -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi/4$$

$$I^2 = \pi/4 \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$$

$$I \times I = I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \times \int_0^\infty e^{-x^2} dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \times \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} \times e^{-y^2} \, dx \, dy$$