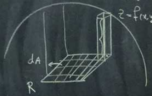
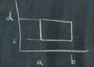
انتگرال دوگانه





$R=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_x \int_y f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال

$$\int_{\underbrace{1}_{x}}^{3}\left(\int_{\underbrace{1}_{y}}^{2} x^2 y\,dy\right)dx =$$

$$\int_1^2 x^2 y\,dy = \frac{x^2 y^2}{2}\Bigg|_1^2 = x^2\left(2-\frac{1}{2}\right) = x^2\times\frac{3}{2}$$

عدد ثابت فرض می‌شود

ادامه:

$$\int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{3}{2}\times 9 = \frac{27}{2}$$

مثال

$$\int_{1}^{2}\underbrace{\int_0^3 x^2 y\,dx}_{x}\,dy =$$

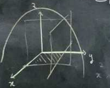
$$y \qquad \int_0^3 x^2 y\,dx = y\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9y \qquad x$$

$$\int_1^2 9y\,dy = 9\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$9\times 2 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

مثال

حجم جسمی را بیابید که توسط سهمی وار بیضوی $x^2+2y^2+z=16$ صفحات $x=2$, $y=2$, صفحات مختصات احاطه شده است



$$\int_1^2 \underbrace{\int_0^{\pi} y\sin(xy)\,dy}\,dx = \int_0^{\pi}\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\,dy$$

$$\int_1^2 y\sin(xy)\,dx = \frac{-y\cos(xy)}{y} = -\cos xy\Big|_1^2 = -\cos(2y) + \cos y$$

گاهی ترتیب (تغییر) انتگرال‌گیری کار را راحت‌تر می‌کند.

توجه

$$\iint_{y\ x} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{x\ y} f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال

$$\iint_R y\sin(xy)\,dA \qquad R = \underbrace{[1,2]}_{x}\times\underbrace{[0,\pi]}_{y}$$

$$\int_0^2 32 - 2x^2 - \frac{16}{3}\,dx = \left(32-\frac{16}{3}\right)\times 2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 = \dots 48$$

$$\int_0^2\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx$$

محاسبه

$$\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dy = 16y - x^2y - \frac{2}{3}y^3\Big|_0^2 = 32 - 2x^2 - \frac{16}{3}$$

$$R = [0,2]\times[0,2]$$

حجم مورد نظر:

$$\iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA =$$

گاهی تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کار را راحت‌تر می‌کند.

$$\iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x}\int_{y} f(x,y)\,dy\,dx$$

توجه

$$\int\left(f(x)\int_{y} g(y)\,dy\right)dx$$

$$\int_{x}\int_{y} f(x)\,g(y)\,dy\,dx =$$

$$\int_{y} g(y)\,dy \times \int_{x} f(x)\,dx$$

$$\int_{x}\int_{y} f(x,y)\,dy\,dx \neq$$

توجه

$$\int_{x} f(x,y)\,dx \times \int_{y} f(x,y)\,dy$$

$$\int_{0}^{\pi} (\cos y - \cos(2y))\,dy = \dots$$

تعریف: فرض کنید D یک ناحیه دلخواه در $\mathbb{R}^2$ باشد.

هدف: $\iint_D f(x,y)\, dA$

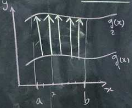
فرض کنید ناحیه D زیرمجموعه ناحیه مستطیلی R باشد

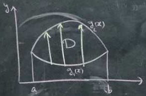
$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in R-D \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\iint_D f(x,y)\, dA := \iint_R F(x,y)\, dA$$

نواحی نوع اول





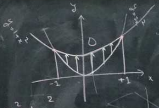
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$\iint_D (x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\underbrace{\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy}\,dx$$

$$\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy = xy+y^2\Big|_{2x^2}^{1+x^2} =$$

$$x(1-x^2)+(1+x^2)^2-(2x^2)^2$$

$$\int_{-1}^{1} x(1-x^2)+(1+x^2)^2-(2x^2)^2\,dx = \dots$$



$2x^2 = 1+x^2$

$x = \pm 1$

مثال

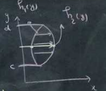
فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y=1+x^2$ و $y=2x^2$ باشد. مطلوب است محاسبه‌ی

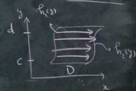
$$\iint_D (x+2y)\,dA$$

ناحیه‌ی نوع دوم

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{c}^{d}\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$y \qquad x$





$$\int_0^y \sin(y^2)\,dx = x\sin(y^2)\Big]_0^y$$

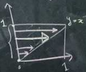
$$= y\sin(y^2)$$

$$\int_0^1 y\sin(y^2)\,dy = \frac{-\cos(y^2)}{2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(1)$$

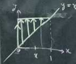
$\int_x^1 \sin(y^2)\,dy$ محاسبه‌ی مشکل است ولی:

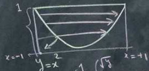
$$\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx = \boxed{\int_0^1\int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy}$$



مثال

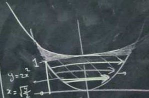
$$\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$$





$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

حل سوال با استفاده از نواحی نوع دوم



$$\int_0^1\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

تمرین

$$\int_0^8 \int_{x^{\frac{1}{3}}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$$

x بجای $\frac{1}{3}$

$$\int_0^2 x^2(2x-x^2)+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{x^6}{3}\,dx$$

$$= \dots$$

راه حل دوم

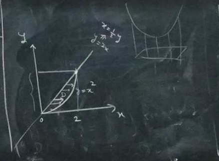
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{4} \int_{x=\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \dots$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$\int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy = x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{2x}$$

$$= x^2(2x-x^2)+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(x^2)^3}{3}$$



مثال

حجم جسمی که زیر سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ و بالای ناحیه محصور به منحنی‌ها $y=x^2$ و $y=2x$ واقع شده است را حساب کنید.