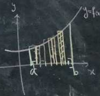
جلسه ۲

انتگرال دوگانه

یادآوری از ریاضی ۱ — $y=f(x)$



فرض کنید تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

و وجود داشته باشد

اگر $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = A$

$$A=\int_a^b f(t)\,dt$$

Summe

قضیه اساسی حساب

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$$

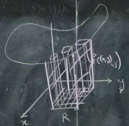
بسم خدا

انتگرال دوگانه

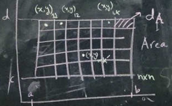
انتگرال‌گیری در نواحی مستطیلی

فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که در ناحیه مستطیلی $R=[a,b]\times[c,d]$ تعریف شده باشد.

$$[a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$



ناحیه R را به صورت زیر تقسیم‌بندی کنید و از هر قسمت یک نقطه انتخاب کنید.



حاصل جمع زیر را بسازید.

$$\sum_{1\le i,j\le n} f\left((x,y)_{ij}\right)\times\Delta A$$

اگر حد زیر وجود داشته باشد

$$\lim_{n\to\infty}\sum f\left((x,y)_{ij}\right)\Delta A$$

بنام خدا

انتگرال دوگانه

آن‌گاه می‌گوییم تابع $z=f(x,y)$ در ناحیه‌ی R انتگرال‌پذیر است و می‌نویسیم

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i,j\le n} f((x_i,y_j))\,\Delta A$$

توجه

اگر $z=f(x,y)$ تابعی نامنفی روی ناحیه‌ی مستطیل R باشد آن‌گاه $\iint_R f(x,y)\,dA$ حجم ناحیه‌ی زیر رویه و بالای مستطیل را نشان می‌دهد.

مثال

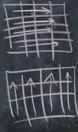
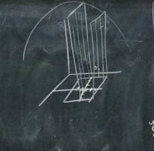
حجم جسمی را که بالای مستطیل $[0,2]\times[0,2]$ و زیر سهمی‌وار بیضوی $z=16-2x^2-2y^2$ واقع شده است را تخمین بزنید.

حجم ناحیه‌ی مورد نظر $\approx f(0,1)(1)+f(1,1)(1)+f(0,2)(1)+f(1,2)(1)$

به طوریکه اگر $x_0 \in [a,b]$ نقطه‌ی دلخواهی باشد
تعریف کنید:

$$A(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy$$

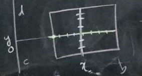
فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ از ناحیه‌ی مستطیلی $R=[a,b]\times[c,d]$ تعریف شده باشد و y_0 یک عدد دلخواه در $[c,d]$ باشد.
تعریف کنید

$$A(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$



نحوه‌ی محاسبه‌ی $\iint_R f(x,y)\,dA$

R ← مستطیل

– انتگرال‌گیری جزئی



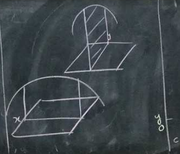
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$\int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{x\ \text{ثابت}} \right) dx$$

$$\int_{a \downarrow x}^{b} \int_{c \downarrow y}^{d} f(x,y)\,dy\,dx =$$

<u>تعریف</u>

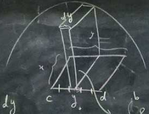
$$\int_a^b \big(k(x)\big)\,dx$$



$$y_0 \overset{h(y)}{\longmapsto} \int_a^b f(x, y_0)\,dx$$

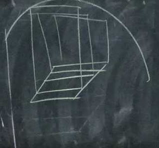
$$x_0 \overset{K(x)}{\longmapsto} \int_c^d f(x_0, y)\,dy$$

$$\int_c^d \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy$$



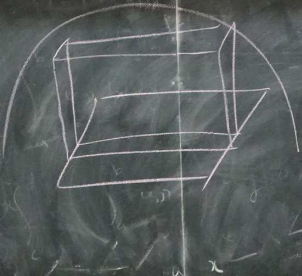
$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

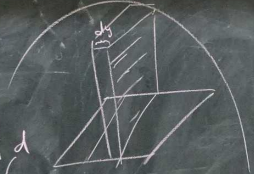
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$



بنام خدا

قضیه (فوبینی)





$$\int_c^d \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\int_{a\,(x)}^{b} \int_{c\,(y)}^{d} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{c\,(y)}^{d} \int_{a\,(x)}^{b} f(x,y)\, dx\, dy$$