یادآوری

اگر تابع $z=f(x,y)$

در یک ناحیه‌ی بسته‌ی کراندار D

پیوسته باشد آنگاه اکسترمم مطلق دارد

در این ناحیه است و این اکسترممها

یا در نقاط بحرانی درون یا روی مرز

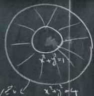
رخ می‌دهند.

مثال اکسترممهای مطلق تابع زیر را

در ناحیه‌ی D بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D=\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$$



① بررسی پیوستگی تابع

در نقاط غیر از $(0,0)$ ✓

در نقطه‌ی $(0,0)$ (بررسی کنید که پیوسته است (تمرین))

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \end{cases}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

توجه

$x^2+y^2=1$

برای بررسی تابع روی مرز کافی است اکسترمم‌های مطلق تابع تک متغیره زیر را حساب کنیم.

$g(x)=x(1-x^2)\quad x\in[-1,1]$

تابع بر حسب x ، تا کمینه اکسترمم‌ها محاسبه شود.

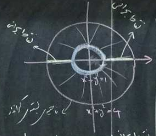
مقدار تابع در تمام نقاط بحرانی برابر با صفر است.

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

قدم دوم: بررسی تابع روی مرز D.

① روی دایره $x^2+y^2=1$ مقدار تابع برابر است با:

$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{1}$



نقاط بحرانی:

$\{(x,y)\mid y=0\}$

نقطه $(0,0)$ در دامنه نیست

نقاط بحرانی:

$y^4-x^2y^2=0\Rightarrow y^2(y^2-x^2)=0$

$\begin{cases}y=0 \ \checkmark\\ y=\pm x\end{cases}$

نقاط بحرانی (نیز) ($\frac{\partial f}{\partial x}=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$

قضیه سوم

می‌یابیم اکسترممهای تابع روی

$x^2+y^2=4$

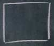
دایره

(مشابه مورد قبل)

قضیه ۳-۴

متناظر متغیر به دست آمد

اکسترمم روی مرز



روش ضرایب لاگرانژ

Lagrange's multipliers

برای محاسبه‌ی اکسترممهای مطلق تابع سه متغیره

$w=f(x,y,z)$ تحت شرط $g(x,y,z)=k$

دستگاه زیر را حل کرده و نقاط به دست آمده تحلیل کنیم

$$(*)\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=k\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_x(x,y,z)=\lambda g_x(x,y,z)\\ f_y(x,y,z)=\lambda g_y(x,y,z)\\ f_z(x,y,z)=\lambda g_z(x,y,z)\\ g(x,y,z)=k\end{cases}$$

چهار معادله

چهار مجهول

توجه

هم، پیدا کردن نقاط (x,y,z) ای

است که جواب معادله هستند $f(x,y,z)=2$

$w=f(x,y,z)$ $(x,y,z)\in$

توجه

منظور از معادلات (*) پیدا کردن تقاطع

$g(x,y,z)=k$ است که

روی رویه

$\nabla g \parallel \nabla f$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=k \end{cases}$$

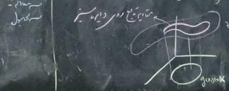
سیستم - تحلیل

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y) \\ g(x,y)=k \end{cases}$$

تابع $z=f(x,y)$ اکسترمم های مطلق را می‌شناسیم

دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم:



توجه

به طور خاص برای

با شرط $g(x,y)=k$

$$w(t)=f(x(t),y(t),z(t))$$

$$w'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}z'(t)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\perp\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\parallel \nabla g$$

توجه: فرض کنید $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ یک منحنی واقع بر رویه [illegible] $g(x,y,z)=k$

باشد $w=f(x,y,z)$

مثال

اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y)=x^2+2y^2$ را روی دایره $x^2+y^2=1$ بیابید.

راه اول:

$g(y)=x^2+y^2+y^2=1+y^2 \qquad y\in[-1,1]$

استفاده از روش ضرایب لاگرانژ

$$\begin{cases}\nabla f \parallel \nabla g \\ x^2+y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=\lambda(2x) \\ 4y=\lambda(2y) \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$2x=\lambda(2x)$: $x=0$, λ دلخواه ؛ $x\neq 0$, $\lambda=1 \Rightarrow 4y=2y \Rightarrow y=0$

نقاط جواب

$x=0,\ y=\pm 1$

$x=\pm 1,\ y=0$

$(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

$f(-1,0)=1$, $f(1,0)=1$ مینیمم مطلق

$f(0,1)=2$, $f(0,-1)=2$ ماکزیمم مطلق

مثال

اکسترمم های $f(x,y)=x^2+2y^2$ را در ناحیه $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$ مشخص کنید.

نتیجه

تابع f روی ناحیه D پیوسته است

ناحیه D بسته و کراندار است $\Leftarrow$ اکسترمم مطلق دارد.

تابع یا روی مرز یا در نقاط بحرانی اکسترمم مطلق دارد.

نقاط اکسترمم روی مرز را در سوال قبل محاسبه کردیم

نقاط بحرانی درون D:

$f_x(x,y)=2x$

$f_y(x,y)=4y$

$\Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

$f(0,0)=0 \longrightarrow$ با توجه به سوال قبل مینیمم مطلق

تمرین

اکسترمم های مطلق تابع

$f(x,y)=x^2y+x^2+y^2/2$

را روی ناحیه

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$

بیابید.

(پیوستگی، نقاط بحرانی، درون یا بستگی از (۱) اگر ...)

مثال حجم (در جلسات قبل)

مثال نقطه‌ای روی صفحه

$x+4y+3z=2$

بیابید که در آن تابع

$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$

دارای کمترین مقدار باشد.

قید: $x+4y+3z=2$ $\;(g(x,y,z))$

$$\begin{cases}\nabla f \parallel \nabla g\\ x+4y+3z=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x=\lambda(1)\Rightarrow \lambda=4x\rightarrow x=\frac{\lambda}{4}\\ 6y=\lambda(4)\Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}y\Rightarrow y=\frac{2}{3}\lambda\\ 2z=\lambda(3)\Rightarrow \lambda=\frac{2}{3}z\Rightarrow z=\frac{3}{2}\lambda\\ x+4y+3z=2\Rightarrow \frac{\lambda}{4}+\frac{8}{3}\lambda+\frac{9}{2}\lambda=2\end{cases}$$

$\lambda=\cdots$

$(x,y,z)=\cdots$

$\downarrow$

کمترین مقدار $f(x,y,z)$ پیدا می‌شود.

تمرین

از بین مثلث‌ها، مثلثی را بیابید که مجموع سینوس زوایای آن حداکثر شود.

تمرین

سه عدد پیدا کنید که جمع آنها 1200 و حاصلضرب
۳ آنها ماکزیمم شود.

تمرین

نقاطی را روی بیضی دار $3x^2-2xy+3y^2=2$ بیابید که فاصله آنها تا مبدأ $\frac{\text{حداکثر}}{\text{حداقل}}$ شود.

تمرین

اکسترمم‌های مقید توابع زیر را بیابید

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-3=0 \end{cases}$$

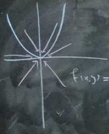
$$\begin{cases} f(x,y) = x^2+2y^2 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$$

سوال

آیا اگر تمام مشتقات سوئی $z=f(x,y)$ موجود باشند در راستای

$Df = f_x a + f_y b$

(a,b)

آیا تابع f دیفرانسیل پذیر است؟ (نه لزوماً)

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & y=x^2,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$