مثال اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را

۱) نقاط بحرانی را بیابید.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

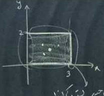
$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$$

توجه

هر تابع پیوسته در یک ناحیه بسته و کراندار

دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است و اینها

یا در نقاط بحرانی و یا روی مرز رخ می‌دهند.



ناحیه بسته و کراندار

محاسبه نقاط بحرانی

$$f_x = 2x - 2y$$

$$f_y = -2x + 2$$

$$\begin{cases} f_y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f_x = 0 \ \& \ f_y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

تنها نقطه بحرانی: $(1,1)$

مقدار تابع در نقطه بحرانی

$$\boxed{f(1,1) = 1}$$

محاسبه اکسترمم‌های مطلق تابع روی مرز

بررسی تابع روی پاره‌خط

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

مقدار تابع روی این پاره‌خط:

$$f(x,0) = x^2 \quad x \in [0,3]$$

$$\boxed{\begin{matrix} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 9 \end{matrix}}$$

مینیمم ... ماکزیمم تابع ...

تمرین

$$f(x,y) = \sin\left(\pi \frac{xy}{2}\right)$$

$$1 \le x \le 2$$

$$1 \le y \le 2$$

تمرین

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$$

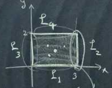
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

تمرین

اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y) = xy^2$ را در ناحیه

$$D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 3\}$$

بیابید



ناحیه بسته کراندار

$$\boxed{\begin{array}{l} f(3,0) = 9 \\ f(3,2) = 1 \end{array}}$$

ماکزیمم و مینیمم تابع روی L_2

هم چنین مقادیر تابع را روی L_3 و L_4 نیز محاسبه کنید.

با مقایسه تمامی کاندیدها ماکزیمم و مینیمم مطلق را پیدا کنید

بررسی مقادیر تابع روی پاره خط L_2:

$$L_2: \begin{cases} x = 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

مقادیر تابع روی L_2:

$$f(3,y) = 9 - 4y$$

$$0 \le y \le 2$$

$u=(1,0)$

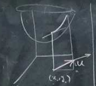
$D_u f(x,y) = f_x(x,y)$

$u=(0,1)$

$D_u f(x,y) = f_y(x,y)$

$u=(a,b)$

$$D_{\vec u=(a,b)}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah,\,y+bh)-f(x,y)}{h}$$



$$z-z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

② اگر تابع دیفرانسیل پذیر باشد

$$\Delta z \approx dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

$f_x(x_0,y_0)$

$f_y(x_0,y_0)$

① تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر است هرگاه

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h_1-f_y(x_0,y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$z = f(x,y)$

① اگر تابع f در نقطه‌ی (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر باشد آن‌گاه f در تمامی جهات مشتق سویی دارد و

$$\circledast \quad D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,a + f_y(x_0,y_0)\,b$$

$\vec{u} = (a,b)$

① اگر تابع f در حداقل یک جهت مشتق سویی نداشته باشد دیفرانسیل پذیر نیست.

② اگر تابع f در تمامی جهات مشتق سویی داشته باشد ولی فرمول $\circledast$ برقرار نباشد تابع دیفرانسیل پذیر نیست.

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \cong f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$ax + by$

اگر $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ هر دو در نقطه‌ی (x_0,y_0) پیوسته باشند آن‌گاه f در (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر است.

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ n & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

آیا f_x در $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 16$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} g_x(x,y) \\ \text{[illegible]} & (0,0) \end{cases}$$

معادله صریح $z = 2x + 8xy$

معادله ضمنی $z^2 x + 4x^2 y = 0$

$f(x,y,z) = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x}$

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

مشتق گیری جزئی

$z = f(x,y)$

در نقطه (x_0,y_0) در جهت بردار $(1,0)$