تعیین اکسترممهای نسبی انواع در متغیره $z = f(x,y)$ (مشتقات دوم پیوسته)

① تعیین نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که در آنها

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$$

② $$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)}$$

محاسبه در نقاط بحرانی

	(x_0,y_0)	(x_1,y_1)	(x_2,y_2)
D	>0	>0	<0
f_{xx}	>0	<0	
	مینیموم نسبی	ماکزیمم نسبی	زینی

درصورتی که $D=0$ از این آزمون درباره‌ی نقطه‌ی مورد نظر نتیجه‌ای نمی‌گیریم.

مثال: اکسترممهای نسبی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

پاسخ

$$f_x = 4x^3 - 4y$$

$$f_y = 4y^3 - 4x$$

$$f_x = 0 \Rightarrow y = x^3$$

$$f_y = 0 \Rightarrow x = y^3$$

$$\Rightarrow y = y^9$$

$$\Rightarrow y(1-y^8) = 0 \Rightarrow y=0,\ y=\pm 1$$

نقاط بحرانی تابع مورد نظر عبارتند از:

$(0,0)$

$(1,1)$

$(-1,-1)$

تحلیل نقاط بحرانی با استفاده از آزمون مشتق دوم:

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -4$$

$$f_{yy} = 12y^2$$

$$D = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
D	<0	>0	>0
f_{xx}		>0	>0
	زینی	مینیمم نسبی	مینیمم نسبی

مثال

اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی تابع زیر را بیابید.

$$f(x,y) = (x-1)\ln xy \quad (xy>0)$$

پاسخ

① تعیین نقاط بحرانی

$$f_x = \ln xy + \frac{y(x-1)}{xy} =$$

$$\ln xy + \frac{x-1}{x}$$

$$f_y = (x-1)\frac{x}{xy} = \frac{x-1}{y}$$

$$f_y = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_x(1,y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

تنها نقطه‌ی بحرانی: نقطه‌ی $(1,1)$

تحلیل نقاط بحرانی با استفاده از آزمون مشتق دوم

$f_{xx} =$

$f_{xy} = f_{yx} =$

$f_{yy} =$

$D = \left| \quad \right| =$

ادامه به عهده‌ی شما

تمرین

۵) کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $(1,0,-2)$ را به صفحه‌ی $x+2y+z=4$ بیابید.

نقطه روی

فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه (x,y,z) از نقطه‌ی $(1,0,-2)$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2}$$

توجه: (x,y,z) کجاست؟ روی صفحه است

$$z=4-x-2y$$

نیز برای این خواهیم مینیمم تابع زیر را بیابیم:

$$f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(4-x-2y+2)^2}$$

توجه

کافی است که مینیمم تابع

$$g(x,y)=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2$$

را حساب کنید ... نقطه: $\left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)$

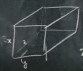
تمرین

حداکثر حجم یک مکعب مستطیل بدون در که بتوان با $12\,m^2$ مقوا ساخت را بیابید

باید تابع xyz ماکزیمم

$$2xy+2yz+xz=12$$

$$\Rightarrow z=\dots$$



مقدار z را در تابع xyz به جای z قرار دهید.

x,y

xyz

تمرین

(اکسترممها را بیابید)

$f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$

$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad (x,y>0)$

$f(x,y)=2x^2+(y-1)^2$

$f(x,y)=y^2-x^2$

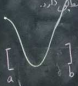
$f(x,y)=8x^3+y^3-12xy+6$

اکسترممهای مطلق

یادآوری از ریاضی ۱

① اگر تابع $y=f(x)$ در یک بازهٔ بسته‌ی کراندار $[a,b]$ پیوسته باشد

② آنگاه تابع f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.



③ اکسترممهای مطلق تابع یا در نقاط بحرانی بازه (a,b) یا در مرز بازه یعنی در نقاط a و b رخ می‌دهند.

روش محاسبه اکسترممهای مطلق برای تابع $y=f(x)$: کافی است مقادیر تابع را در نقاط بحرانی و در نقاط انتهایی بازه با هم مقایسه کنید.

تعریف

می‌گوییم تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $(x_0,y_0)\in \mathrm{Dom} f$ دارای مینیمم مطلق است هرگاه

$$\forall (x,y)\in \mathrm{Dom} f \qquad f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

به طور مشابه تابع یاد شده در نقطهٔ (x_0,y_0) دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه

$$\forall (x,y)\in \mathrm{Dom} f \qquad f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

قضیه

اگر تابع $z=f(x,y)$ در مجموعهٔ بستهٔ کراندار D پیوسته باشد، آن‌گاه f در D دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.

تعاریف توپولوژیکی مورد نیاز

گوی باز به مرکز (x_0,y_0) و شعاع δ:

$$B_\delta(x_0,y_0)=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

نقطهٔ (x_0,y_0) را یک نقطهٔ مرزی برای مجموعهٔ $D\subseteq\mathbb{R}^2$ هرگاه هر گوی باز دلخواه $B_\delta(x_0,y_0)$ اشتراک داشته باشد هم با D و هم با D^c (خارج D)

تعریف
مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را کراندار می‌نامیم هرگاه یک گوی باز $B_\delta(x_0,y_0)$ موجود باشد به طوری که $D \subseteq B_\delta(x_0,y_0)$


کراندار


بیکران


بسته نیست


بسته نیست

تعریف
مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را بسته می‌نامیم هرگاه تمام نقاط مرزی خود را شامل باشد.


بسته و کراندار


بسته و بیکران


مرز


نقطه مرزی
نقاط مرزی مجموعه متعلق به شکل
نیست

در $\mathbb{R}$:
$[a \quad b)$

قضیه

هر تابع پیوسته‌ی $z=f(x,y)$ در یک مجموعه‌ی بسته‌ی کراندار دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است

نحوه‌ی تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته‌ی $z=f(x,y)$ در مجموعه‌ی بسته‌ی کراندار D

1. مقادیر تابع را در نقاط بحرانی محاسبه کنید
2. مقادیر تابع را در مرز D محاسبه کنید
3. این مقادیر را با هم مقایسه کنید.