هر روز ۱۲-۱۳ کلاس تمرین
+
(ساعت) کلاس تمرین در روز چهارشنبه

قاعده زنجیره‌ای

① مشتق گیری صریح

② مشتق گیری ضمنی

مثال برای ①. اگر $z=f(xy, x+y)$ آن گاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را حساب کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(xy, x+y)\times y+\frac{\partial f}{\partial v}(xy, x+y)\times 1$$

$$\big(f(g(x))\big)'=g'(x)\,f'(g(x))$$

مثال برای ②

فرض کنید z تابعی از x, y است داریم

$$f(x+z,\ y-z)=0$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ مطلوب است محاسبه‌ی

پاسخ

$$f(\overset{u}{x+z},\ \overset{v}{y-z})=0$$

از دو طرف بر حسب x مشتق بگیرید: x, y

$$\frac{\partial f}{\partial u}\times\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\times\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\dots$$

هر روز ۱۲-۱۳ کلاس تمرین
+
در ساعت کلاس تمرین در روز چهارشنبه

روشی دیگر برای مثال ۲

یادآوری

اگر $F(x,y,z)=0$ و z تابعی از x, y باشد آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (x,y,z \text{ مستقل})$$

$$F(x,y,z) = f(x+z,\ y-z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\times 1}{\frac{\partial f}{\partial u}\times 1 + \frac{\partial f}{\partial x}(-1)}$$

اکسترمم‌های نسبی

یادآوری

گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه $x_0 \in Dom\, f$ دارای مینیمم نسبی است هرگاه

تابع در یک همسایگی $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ تعریف شده باشد و

$$\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ \left(f(x_0) \le f(x)\right)$$

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 دارای مینیمم نسبی باشد یا در x_0 مشتق f وجود ندارد.
مشتق در x_0 برابر با صفر است.

اگر x_0 یک نقطه بحرانی باشد که $f'(x_0)=0$، $f''(x_0)>0$ آنگاه x_0 یک مینیمم نسبی است

اگر $f'(x_0)=0$ لزوماً تابع در x_0 مینیمم یا ماکزیمم نمی‌باشد

$y=x^3$

نقطه عطف (نقطه زینی)

همسایگی

اگر همسایگی تابع $z=f(x,y)$ ؛ $(x,y)\in D_f$

منظور از همسایگی یک نقطه یک دایره (دیسک) باز به مرکز (x_0,y_0) است:

$$B_\delta(x_0,y_0)=\left\{(x,y)\;\middle|\;\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

تعریف

هر گاه تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای مینیمم نسبی (مینیمم موضعی) است هرگاه یک همسایگی $B_\delta(x_0,y_0)$ موجود باشد بطوری که

$$\forall (x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)\ \left(f(x_0,y_0)\le f(x,y)\right)$$

local min

بطور مشابه ماکزیمم نسبی تعریف می‌شود:

$$\forall (x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$$

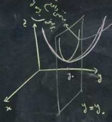
$$f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$$

ملاحظه

اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه کلیه مقاطع

در واقع در آن نقطه همه مقاطع مینیمم نسبی دارند.

مرجع



به طور خاص منحنی واقع بر صفحه $y=y_0$ دارای مینیمم نسبی است.

اثبات :

اگر $f(x_0,y_0)$ یک مینیمم یا ماکزیمم نسبی برای تابع $z=f(x,y)$ باشد آنگاه اگر $f_x(x_0,y_0)$ موجود باشد آنگاه $f_x(x_0,y_0)=0$. به طور مشابه برای $f_y(x_0,y_0)$.

به بیان بهتر اگر تابع f در نقطه (x_0,y_0) مینیمم یا ماکزیمم نسبی داشته باشد آنگاه

$0=f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$ یا حداقل یکی از f_x یا f_y موجود نیست

تعریف

گوییم نقطه (x_0,y_0) یک نقطه بحرانی برای تابع $z=f(x,y)$ است هرگاه

$0=f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$ یا یکی از f_x یا f_y در آن نقطه موجود نباشند

توجه

هر نقطه بحرانی لزوماً مینیمم یا ماکزیمم نسبی نیست.

مینیمم

تعریف

نقطه (x,y) را یک نقطه **زینی** می‌نامیم هرگاه $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ اما (x,y) مینیموم یا ماکزیمم نسبی نیست.

نقطه بحرانی:

$f_x=f_y=0$ ← مینیمم، ماکزیمم، زینی

f_x یا f_y وجود نداشته باشد ← مینیموم، ماکزیمم، هیچکدام

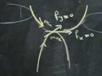
یادآوری

اگر $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر باشد آن‌گاه بردار نرمال بر صفحه مماس در نقطه (x_0,y_0) به صورت زیر است

$$\vec{n}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1\right)$$

بنابراین اگر $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر باشد آن‌گاه $\vec{n}=(0,0,1)$ یعنی صفحه مماس، افقی است.

نقطه زینی



مثال: اکسترممهای نسبی تابع زیر و نوع آنها را مشخص کنید.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

پاسخ:

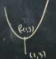
$$f_x = 2x - 2$$
$$f_y = 2y - 6$$

$$f_x(x,y) = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f_y(x,y) = 0 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین نقطه $(1,3)$ یک نقطه بحرانی است که در آن همزمان $f_x = f_y = 0$.

$$f(x,y) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-3)^2}_{\geq 0} + 4$$

بنابراین نقطه $(1,3)$ یک مینیمم نسبی برای تابع f است.



مثال: نقاط بحرانی تابع $z = y^2 - x^2$ و نوع آنها را مشخص کنید.

$$f_x = -2x$$
$$f_y = 2y$$

نقطه $(0,0)$ به طور همزمان $f_x = f_y = 0$. پس این نقطه بحرانی است.

اگر از مسیر $(-x^2,0)$ به $(0,0)$ نزدیک شویم تابع دارای ماکزیمم است و اگر از مسیر $(0,y^2)$ به $(0,0)$ نزدیک شویم تابع دارای مینیمم است.

نقطه مورد نظر زینی است.

آزمون مشتق دوم

فرض کنید مشتقات دوم تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ (x_0,y_0) موجود و پیوسته باشند.

و فرض کنید $0=f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

قرار دهید:

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{f_{xx}(x_0,y_0)} & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

← دترمینان

$$f_{yx}(x_0,y_0) = f_{xy}(x_0,y_0)$$

به بیان دیگر

$$D=\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)(x_0,y_0)$$

آن گاه داریم:

$D>0$: $f_{xx}>0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی ، $f_{xx}<0 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

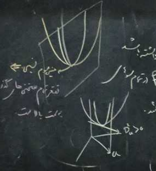
$D<0 \Rightarrow$ نقطهٔ زینی

$D=0 \Rightarrow$ نظری نمی‌توان داد (مینیمم / ماکزیمم / زینی)

ایدهٔ اثبات

اگر f در (a,b) مینیمم نسبی داشته باشد

آن گاه مشتق سوئی دوم f در (a,b) در سوی $\vec{u}=(a,b)$ باید مثبت باشد.



$$D^2 f_{(a,b)} = f_{xx} a^2 + 2 f_{xy} ab + f_{yy} b^2$$

$$= f_{xx} \underbrace{\left(a + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} b\right)^2} +$$

$$\frac{b^2}{f_{xx}} \underbrace{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)}_{D}$$