تمرین

نشان دهید که بیضی‌وار $F_1(x,y,z)$: $3x^2+2y^2+z^2=9$

و کره $F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+26=0$

در نقطه $(1,1,2)$ بر هم مماسند.

کافی است نشان دهیم که هر دوی این رویه‌ها

در نقطه یاد شده دارای صفحه مماس هستند

و صفحه مماس بر هر دوی آنها یکی است.

$$\nabla F_1 = (6x, 4y, 2z)$$

$$\nabla F_1(1,1,2) = (6,4,4)$$

$$\nabla F_2 = (2x-8, 2y-6, 2z-8)$$

$$\nabla F_2(1,1,2) = (-6,-4,-4)$$

توجه کنید از آنجا که ∇F_1 و ∇F_2

در نقطه مورد نظر ناصفر هستند هر دوی

این رویه‌ها دارای صفحه مماس هستند.

کافی است نشان دهیم که $\nabla F_1 \underbrace{\parallel}_{\text{موازی}} \nabla F_2$ در نقطه $(1,1,2)$

$$(-6,-4,-4) \parallel (6,4,4)$$

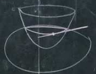
$$(a,b,c) \parallel (a',b',c') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ادامه

هر دوی این رویه‌ها دارای صفحه مماس یکسان در نقطه مورد نظر هستند یعنی بر هم مماسند.

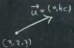
تمرین

معادله خط مماس بر منحنی محل اشتراک (۱-۲) سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ (F_1) و بیضی‌وار $4x^2+y^2+z^2=9$ (F_2) را در نقطه $(-1,1,2)$ بنویسید.



توجه

برای نوشتن معادله خط نیازمند داشتن بردار هادی آن و یک نقطه روی آن هستیم.



$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

پاسخ

خط مماس بر منحنی مورد نظر بر صفحه‌های مماس بر هر دو رویه در نقطه مورد نظر واقع است. یعنی اگر $\vec{n}$ بردار هادی خط مورد نظر باشد

$$\nabla F_1 \perp \vec{n}$$

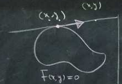
$$\nabla F_2 \perp \vec{n}$$

بنابراین

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

مثال معادله خط مماس بر منحنی زیر را بنویسید در نقطه $(1,2)$.

$$x^3y-x^2y^2+xy^3=6$$



$$(x-x_0,\ y-y_0)\perp\nabla F(x_0,y_0)=\big(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\big)$$

تمرین

فرض کنید C نمودار $F(x,y)=0$ باشد و F دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد که هر دو با هم صفر نمی‌شوند. نشان دهید که معادله خط مماس بر نمودار در نقطه $P=(x_0,y_0)$ به صورت زیر است:

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

جهت بردار هادی:

$$(-8,2,4)\times(2,-2,1)=(a,b,c)$$

معادله خط:

$$\frac{x+1}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-2}{c}$$

$$F_1(x,y,z)=z-x^2-y^2=0$$

$$\nabla F_1=(-2x,-2y,1)$$

$$\nabla F_1(-1,1,2)=(2,-2,1)$$

$$\nabla F_2=(8x,2y,2z)$$

$$\nabla F_2(-1,1,2)=(-8,2,4)$$

تمرین

فرض کنید تابع $z = f(x,y)$ دارای این ویژگی باشد

که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ داریم

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

نشان دهید که

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$$

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

از دو طرف عبارت بالا برحسب t مشتق بگیرید.

$$f(\overset{u}{tx}, \overset{v}{ty})$$

$f(x,y)$

$$\circledast \quad \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\, y = n t^{n-1} f(x,y)$$

به عنوان درایه اول f

$u = tx$

$v = ty$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\frac{u}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\frac{v}{t} =$$

$$n t^{n-1} f\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right)$$

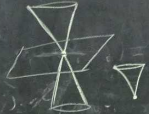
$$u\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = n t^n f\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right) = nf(u,v)$$

$$f\left(t \times \frac{u}{t}, t \times \frac{v}{t}\right)$$

تمرین

در کدام نقطه (یا نقاط) روی مخروط صفحه مماس و خط قائم تعریف نشده است؟

$$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2=0$$



$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\nabla F = (2x, 2y, -2z)$$

تنها در نقطه $(0,0,0)$ تمامی درایه‌ها همزمان صفر می‌شوند.

پس در تمام نقاط غیر از $(0,0,0)$ صفحه مماس وجود دارد.

در نقطه $(0,0,0)$ بردار نرمال و صفحه مماس وجود ندارد

ثابت کنید که تابع

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست.

ثابت کنید که تابع

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست.

تمرین

نشان دهید که صفحات مماس بر رویه

$$z = y f\left(\frac{y}{x}\right)$$

از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.