بسم خدا

① نمرات کوئیز اعلام شده است.

② در دو هفته پیش رو هر روز از ۱۲ تا ۱۳ کلاس تمرین داریم

میانترم (تالار ۳)

③ میانترم تا ابتدای
تعیین اکثر مبحث‌ها.

ادامه درس

یادآوری

مشتق سوئی دوم تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در جهت بردار $\underbrace{\vec{u}=(a,b)}_{\text{یکه}}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

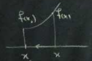
$$D^2_{\vec{u}=(a,b)} f(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)\,a^2 + f_{yy}(x_0,y_0)\,b^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,ab$$

یادآوری

جملات بسط تیلور توابع تک متغیره

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$$



چند جمله‌ای تیلور برای تابع $z=f(x,y)$

$\vec{u}=(x-x_0,\, y-y_0)$

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\Delta z \approx dz$$

درجه دوم

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \left[f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right] + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

تمرین

چند جمله‌ای تیلور درجه n ام را حدس بزنید.

تمرین

چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی دوم تابع

$$z=e^{-(x^2+y^2)}$$

را حول نقطه $(0,0)$ بنویسید.

تمرین

فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ دارای این ویژگی باشد که برای هر عدد $t\in\mathbb{R}$ و هر $(x,y)\in$ دامنه داریم:

$$f(tx,ty)=t^{n} f(x,y)$$

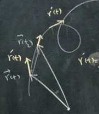
(n ثابت)

نشان دهید که

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$$

خم‌ها در $\mathbb{R}^3$

$$\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

تمرین خم‌های زیر بر رویه که واقعند از نقطه‌ی $(2,1,3)$ روی رویه می‌گذرند.

$$\vec r_1(t) = (2+3t,\ 1+t^2,\ 3-4t+t^3)$$

$$\vec r_2(u) = (1+u^2,\ 2u^3-1,\ 2u+1)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بنویسید.

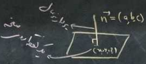
توجه

$$\vec r_1(0) = (2,1,3)$$

$$\vec r_2(1) = (2,1,3)$$

توجه صفحه‌ی مماس شامل تمامی خطوط حاصل از تمامی خم‌های گذرنده از این نقطه است.

یادآوری



معادله‌ی صفحه

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر ما بر $r_1'(0)$ و $r_2'(1)$ عمود است. در نتیجه آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec n = r_1'(0)\times r_2'(1)$$

فرض کنید خم $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ روی رویه واقع باشد و $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

از آنجایی که خم یاد شده بر رویه واقع است داریم

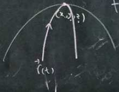
$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

معادله خط نرمال و صفحه مماس بر رویه‌های تراز

فرض کنید رویهٔ S توسط یک معادله ضمنی

$$F(x,y,z) = 0$$

داده شده باشد.



$$\vec{n} = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) \triangleq (a, b, c)$$

$(2,1,3)$ نقطه

معادله صفحه

$$a(x-2) + b(y-1) + c(z-3) = 0$$

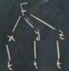
$$r_1'(t) = (3, 2t, -4+3t^2)$$

$$r_1'(0) = (3, 0, -4)$$

$$r_2'(u) = (2u, 6u^2, 2)$$

$$r_2'(1) = (2, 6, 2)$$

از دو طرف عبارت بالا برحسب t مشتق بگیرید.

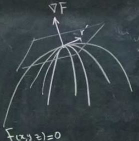


$$\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{r}(t_0))\,x'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{r}(t_0))\,y'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\vec{r}(t_0))\,z'(t_0)=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{r}(t_0)),\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{r}(t_0)),\frac{\partial F}{\partial z}(\vec{r}(t_0))\right)\cdot\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\perp r'(t_0)$$

عمود است



نتیجه

اگر رویه S توسط معادله $F(x,y,z)=0$ داده شده باشد آنگاه $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ در نقطه (x_0,y_0,z_0) بر رویه S عمود است.

$$F(x,y,z)=0 \quad \Big| \quad \nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

نتیجه: معادله خط نرمال بر رویه در نقطه (x_0,y_0,z_0):

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

معادله صفحه مماس:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

مثال: معادله خط نرمال و صفحه مماس بر رویه $f(x,y,z)=k$

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$$

را در نقطه $(2,1,-3)$ بنویسید.

$$\nabla F=\left(\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{9}\right)$$

$$\nabla F(2,1,-3)=\left(1,2,\frac{-2}{3}\right)$$

معادله خط نرمال:
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{\frac{-2}{3}}$$

معادله صفحه مماس:
$$1(x-2)+2(y-1)+\left(\frac{-2}{3}\right)(z+3)=0$$

مشاهده

اگر رویه S با معادله $z=f(x,y)$ داده شده باشد

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

$$\nabla F=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$$

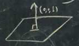
معادله صفحه مماس:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+z-z_0=0$$

توجه

$z=f(x,y)$

اگر $\nabla f=(0,0)$ (اِف کوچک) آن صفحه مماس بر رویه (در صورت وجود) $z=f(x,y)$ افقی است



یادآوری رویه: $z=f(x,y)$

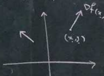
① $\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$ بر رویه عمود است.

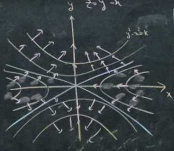
② $\nabla f=(f_x,f_y)$ در هر نقطه بر منحنی‌های تراز عمود است.

مثال

برای تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ تابع برداری ∇f را رسم کنید.

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$





مثال

در کدام نقطه روی بیضی‌وار

$$x^2+y^2+2z^2=1$$

صفحه مماس با صفحه $\underbrace{x+2y+z=1}_{n_1 \text{ بردار نرمال}}$ موازی است؟

$$n_1=(1,2,1)$$

$(1,2,1)$

باید پیدا کنیم که در کدام نقطه روی این بیضی‌وار بردار گرادیان هم‌سو با بردار $(1,2,1)$ است.

$$\nabla F=(2x,2y,4z)$$

$$\begin{cases} (2x,2y,4z) \parallel (1,2,1) \\ x^2+y^2+2z^2=1 \end{cases}$$

حل دستگاه داراسی راه حل باشد.

$$\begin{cases} (2x, 2y, 4z) = h(1,2,1) \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{h}{2}, \; y = h, \; z = \frac{h}{4} \\ \frac{h^2}{4} + h^2 + 2\frac{h^2}{16} = 1 \end{cases}$$