به نام خدا

سال نو مبارک.

نمرات کوییز تا پایان این هفته اعلام خواهد شد.

- دیفرانسیل پذیری برای تابعی مانند

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

در نقطهٔ (x,y).

- مشتق‌های جزئی:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

f_y به طور مشابه تعریف شد.

- وجود f_x ، f_y موجب دیفرانسیل پذیری نمی‌شود.

- اگر تابع f در (x,y) دیفرانسیل پذیر باشد، تمامی مشتقات سوئی آن در این نقطه موجود هستند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\boxed{D_{\vec{u}=(a,b)} f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b}$$

تعریف اصلی مشتق سوئی

یکه
$\vec{u} = (a,b)$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x,y)}{h}$$

توجه

اگر یکی از مشتقات سوئی تابع موجود نباشد یا اگر موجود * برقرار نباشد تابع ، دیفرانسیل‌پذیر نیست.

مثال

آیا تابع $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ در نقطه $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

پاسخ

بررسی مشتقات سوئی تابع f در نقطه $(0,0)$ در جهت هر بردار یکه $\vec{u}=(a,b)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+ah,0+bh)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{ab\,h^2}}{h}=\lim\frac{\sqrt[3]{ab}\,h^{\frac{2}{3}}}{h}$$

حد بالا تنها در صورتی موجود است که $ab=0$

بنابراین تابع f تنها در جهت‌های $\pm i$, $\pm j$ مشتق سوئی دارد. پس دیفرانسیل‌پذیر نیست.

می‌شود = is being

است = is = est = ist

توجه

اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد

$$\nabla f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(x,y)=\big(f_x(x,y),\,f_y(x,y)\big)$$

بنابراین اگر تابع f در نقطه‌ی (x,y) دیفرانسیل‌پذیر باشد مشتقات سوئی آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

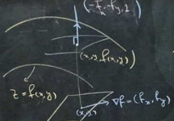
$$\vec{u}=(a,b)$$

$$D_{\vec{u}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$$

بنابراین حداکثر میزان تغییر تابع f در نقطه‌ی (x,y) در جهت بردار گرادیان است و میزان این تغییر برابر با

$$|\nabla f(x,y)|$$

است.



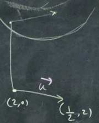
$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

$$\nabla F=(-f_x,-f_y,1)$$

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

مثال

نرخ تغییرات تابع $f(x,y)=xe^{y}$ در نقطه $(2,0)$ وقتی به سمت نقطه $(\frac{1}{2},2)$ حرکت کنیم چقدر است؟



بردار تغییرات $= (-\frac{3}{2}, 2)$

یکه سازی $= \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}(-\frac{3}{2}, 2)$

(در حالتی که f در آن بیشترین ... است)

$$D_{\vec{u}}f(2,0) = f_x(2,0)\,a + f_y(2,0)\,b \qquad \vec{u}=(a,b)$$

$$= \nabla f(2,0)\cdot\vec{u}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (e^{y}, xe^{y})$$

$$\nabla f(2,0) = (1,2)$$

$$D_{\vec{u}}f(2,0) = (1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}(-\frac{3}{2},2)$$

$$= 1$$

مثال

نرخ تغییرات تابع $f(x,y)=xe^{y}$ را در نقطه $(2,0)$ وقتی به سمت نقطه $(\frac{1}{2},2)$ حرکت می‌کنیم چقدر است؟

سوال تابع فوق در نقطه $(2,0)$ در کدام جهت حداکثر میزان تغییرات را دارد و این میزان چقدر است؟

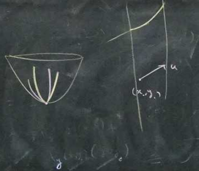
در جهت بردار گرادیان یعنی بردار $\frac{1}{\sqrt{1+4}}(1,2)$. میزان تغییر =

$$|\nabla f|=\sqrt{5}$$

مثال

مشتق سوئی دوم تابع $z=f(x,y)$ را در جهت بردار $\vec{u}=(a,b)$ محاسبه کنید.

(در هر نقطه دلخواه و با فرض اینکه تابع f تابع خوبی است)



$\vec{u}=(a,b)$

مشتق سوئی اول در جهت $\vec{U}$

$$D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{U} = (f_x, f_y)\cdot(a, b)$$
$$= f_x a + f_y b = a f_x(x,y) + b f_y(x,y)$$

در یک نقطه خاص (x_0, y_0):

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\, a + f_y(x_0,y_0)\, b$$

$$D_{\vec{u}} f_x = \vec{\nabla} f_x \cdot \vec{u} = f_{xx} a + f_{xy} b$$
$$D_{\vec{u}} f_y = \vec{\nabla} f_y \cdot \vec{u} = f_{yx} a + f_{yy} b$$

مشتق سوئی دوم تابع f:

$$a(f_{xx} a + f_{xy} b) + b(f_{xy} a + f_{yy} b)$$
$$= a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy}$$

$$D^2_{\vec{u}} f = a^2 f_{xx} + b^2 f_{yy} + 2ab f_{xy}$$

توجه: فرمول فوق بسط تیلور مرتبه دوم تابع f را بدست می دهد.

$\vec{u}=(x-x_0, y-y_0)$ (x,y) (x_0,y_0)

$$f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{yy}(y-y_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0)$$

بسط تیلور توابع دو متغیره (مراتب اول و دوم)

فرض کنید بخواهیم مقدار تابع $z=f(x,y)$ را در یک نقطه دلخواه (x,y) برحسب مقدار تابع در یک نقطه (x_0,y_0) تخمین بزنید

(x,y) (x_0,y_0)

مرتبه اول: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

مرتبه دوم: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{yy}(y-y_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0)\right)$

یادآوری

تک متغیره

چندجمله‌ای تیلور

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

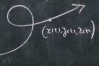
معرفی اجمالی خم‌های فضائی (یا معادلات برداری)

یک خم (curve) در $\mathbb{R}^3$ توسط یک معادلهٔ برداری به صورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

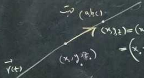
$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$



مثال

خط‌ها



$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$$

$$= (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\parallel$$

$$(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

به بیان دیگر

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ ← معادلهٔ برداری خط

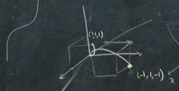
$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$ معادلهٔ جبری خط

مثال

$\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3)$

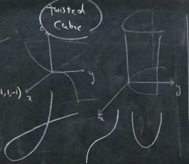
$t\in(-1,1)$

توجه: خم بالا روی استوانه‌های $y=x^2$ و $z=x^3$ واقع است.



$t=-1 \Rightarrow (-1,1,-1)$

$t=1 \Rightarrow (1,1,1)$



مثال

منحنی محل تلاقی استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و صفحهٔ $y+z=2$ را پارامتری کنید.

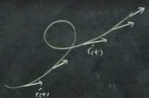
از آنجایی که منحنی مورد نظر روی استوانه واقع است داریم:

$x=\cos t$

$y=\sin t$

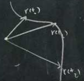
$z=2-\sin t$

$\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2-\sin t)$



$\nearrow = r(t_0+h) - r(t_0)$

$$r'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right)$$



فرض کنید $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ معادله برداری یک خم باشد.