تمرین

برای اثبات این که تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) پیوسته است باید برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ پیدا کنیم به طوری که:

الف) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$

ب) $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$

ج) $|f(x,y)-f(a,b)|<\delta$

د) الف و ب

۵) اگر الف آنگاه ب

مثال نشان دهید تابع زیر در $(0,0)$ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ **چرک‌نویس**

$$\left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\,|\sin(xy)|}{|x^2+y^2|}$$

$$|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\sin(xy)|\leq|xy|=|x|\,|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|f(x,y)|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

پایان چرک‌نویس

اثبات پیوستگی تابع f در نقطهٔ $(0,0)$:

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن $\delta>0$ به طوری که

اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ آنگاه $|f(x,y)|<\varepsilon$

برای $\varepsilon>0$ داده شده فرض کنید $\delta>0$ عدد دلخواهی باشد به طوری که $\delta<\varepsilon$.

حال اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ آن گاه

$$|f(x,y)|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta<\varepsilon.$$

مثال

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & y=x^2\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

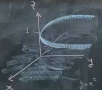
ملاحظه اول

روی تمام مسیرهای $y=mx$ به سمت $(0,0)$ حد تابع 0 است.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=0$$

روی مسیر $y=x^2$ به سمت $(0,0)$ حد تابع 1 است.

پس این تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست.



مثال

نشان دهید که تابع زیر در $(0,0)$ حد ندارد.

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

$f(x,x^2) = \frac{x^6}{x^3+x^6}$ روی مسیر $y=x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^3} = \underline{0}$

$f(x,-x) = \frac{x^4}{0}$ ~~روی مسیر $y=-x$~~

مسیر غیر مجاز، زیرا این مسیر در دامنه نیست.

$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid y=-x\}$

$f(x,\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^3+\frac{1}{x^3}}$ روی مسیر $y=\frac{1}{x}$ به سمت $(0,0)$

$\lim_{x\to 0} f(x,\frac{1}{x}) = \underline{0}$

این مسیر به $(0,0)$ نزدیک نمی‌شود

$f(x,0) = \frac{0}{x^3}$ روی مسیر $y=0$ به سمت $(0,0)$

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \underline{0}$

$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^3+y^3}$

$f(x,x) = \frac{x^4}{2x^3}$ روی مسیر $x=y$ به سمت $(0,0)$

$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^{۲}-1)^{\frac{۲}{۳}}}{x} = \infty$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^{2}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$\sqrt[6]{}$$

$$f(x, \sqrt[۳]{x^{۵}-x^{۳}}) = \frac{x^{۴} \cdot (x^{۵}-x^{۳})^{\frac{۲}{۳}}}{x^{۵}}$$

روی مسیر $y = \sqrt[۳]{x^{۵}-x^{۳}}$

$$(x^{5}-x^{3})^{\frac{2}{3}} = \left(x^{3}(x^{2}-1)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, \sqrt[۳]{x^{۵}-x^{۳}}) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{۴}(x^{۲}-1)^{\frac{۲}{۳}}}{x^{۵}}$$

$$f(x,y) = \frac{x^{۴} y^{۲}}{x^{۴} + y^{۴}}$$

$$x^{3} + y^{3} = x^{5}$$

$$y = \sqrt[3]{x^{5}-x^{3}}$$