$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

تعریف

تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) پیوسته است هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

(a,b)

توجه

اگر توابع $f(x,y)$ و $g(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) پیوسته باشند آنگاه توابع زیر نیز در (a,b) پیوسته‌اند

$\lambda f + \lambda' g$

عدد حقیقی

$f\cdot g \qquad (x,y)\mapsto f(x,y)\cdot g(x,y)$

$\dfrac{f}{g} \qquad (g(a,b)\neq 0)$

$h\circ f(x,y)$ (در (a,b)) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته

$(x,y)\xrightarrow{f} f(x,y) \xrightarrow{h} h(f(x,y))$ $\quad \mathbb{R}$

توجه توابع گویا

$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \to ax^n y^m + \dots$

چندجمله‌ای

در دامنهٔ خود پیوسته‌اند.

مثال توابع زیر در دامنهٔ خود پیوسته‌اند.

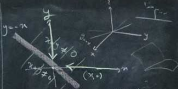
$$f(x,y) = \ln(1+x^2y^2)$$

$$g(x,y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2+1}\right)$$

مثال

نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & x+y\neq 0 \\ 0 & x+y=0 \end{cases}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^3} & x+y\neq 0\\[2mm] 0 & x+y=0\end{cases}$$

برای بررسی پیوستگی تابع در مبدا باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0 \; ?$$

توجه: اگر $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ آن‌گاه از هر مسیری در دامنه که (x,y) به $(0,0)$ میل کند $f(x,y)$ باید به صفر میل کند.

روی مسیر $y=-x$ کلاً مقدار تابع صفر است، پس روی این مسیر

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x)=0$$

مسیر: $(x,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

از آنجا که روی مسیر $\vec{r}(x)=(x,0)$ تابع حد ندارد پس تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست.

مثال: نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آنها پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ

فرض کنید $(a,b)\neq(0,0)$.

ادعا می‌کنیم که تابع بالا در (a,b) پیوسته است

$$(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$$

توابع گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند. $\neq 0$

بررسی پیوستگی در $(0,0)$.

$$y=x \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2x^3}{3x^2} = 0$$

تمرین: چند مسیر دیگر را نیز امتحان کنید.

ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

برای اثبات ادعای بالا باید نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x,y)$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)|<\varepsilon\right)$$

جزء نویسی

$$|y|^3 = |y|\,|y^2|, \quad |y| = \sqrt{y^2}$$

$$\left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2|\,|y|^3}{|2x^2+y^2|} \leq \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$= (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$$

خلاصه

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$$

۱۰

حل

اثبات پیوستگی

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

فرض کنید $\delta>0$ عدد دلخواهی باشد به طوری که

$$\delta<\sqrt[3]{\varepsilon}$$

در این صورت اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

آنگاه $\left|f(x,y)\right|\le(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$

$$<\delta^3<\varepsilon$$

درنتیجه برقرار است.

ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

برای اثبات ادعای بالا باید نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall(x,y)$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)\right|<\varepsilon\right)$$

چرک‌نویس

$$\left|y^3\right| = \left|y\right|\left|y^2\right|,\quad \left|y\right| = \sqrt{y^2}$$

$$\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right|=\frac{\left|x^2\right|\left|y\right|^3}{\left|2x^2+y^2\right|}$$

$$\le\frac{\cancel{(x^2+y^2)}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$=(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$$

خلاصه

$$\left|f(x,y)\right|\le(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}<\delta^3<\varepsilon$$

محاسبات

$$\left|x^2\right|\le\left|x^2+y^2\right|$$

$$\left|y^3\right|=\left|y\right|\left|y^2\right|=\sqrt{y^2}\left|y^2\right|\le\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)$$

۱۰

مثال

تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ: در نقاط $(a,b)\neq(0,0)$ تابع دارای ضابطه یک تابع گویاست پس پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در مبدأ:

مسیر (x,x^3)

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3x^3}{x^6+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{2x^6}=\frac{1}{2}$$

در مسیر یاد شده در دامنه، تابع به عدد $\frac{1}{2}$ میل می‌کند نه به حد تابع صفر، یعنی تابع پیوسته نیست.

بنابراین تابع در $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ پیوسته است.

مثال

نشان دهید که تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در مبدأ پیوسته است.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. هدف: پیدا کردن $\delta>0$ به گونه‌ای که شرط زیر برقرار باشد.

$$\forall (x,y)\ \left(\sqrt{x^2+y^2}<\delta\rightarrow |f(x,y)|<\varepsilon\right)$$

چرکنویس:

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|\,|\sin(xy)|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|}{x^2+y^2}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

توجه

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

برای $\varepsilon>0$ داده شده اگر δ را عدد دلخواهی بگیریم به طوری که $\frac{1}{\varepsilon}<\delta$ آنگاه اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ آن گاه $|f(x,y)|<\varepsilon$.

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \to |f(x,y)| < \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{1}{\delta} < \varepsilon$$

?

راه حل غلط!!!

چرک نویس

$$|\sin(xy)| \leq |xy|$$

$$|f(x,y)| = \frac{|x||\sin(xy)|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,|x||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}$$

برای $\varepsilon>0$ داده شده کافی است δ را به گونه‌ای بگیریم که $\delta<\varepsilon$.

آن گاه برای (x,y) اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

آن گاه

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon \quad \checkmark$$