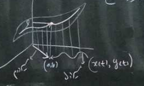
توجه: اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ آن گاه از هر مسیری که (x,y) به (a,b) نزدیک شود تابع $f(x,y)$ در آن مسیر به l نزدیک می‌شود.



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \neq l \iff$$

بنابراین

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall \delta>0 \quad \exists (x,y) \quad \left(0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \ \wedge\ |f(x,y)-l| \geq \varepsilon\right)$$

<u>یادآوری</u>

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l \iff$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_\varepsilon>0 \ \forall (x,y) \ \left(0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \to |f(x,y)-l|<\varepsilon\right)$$

وب سایت دانشکده ریاضی

دستیاران آموزشی

کلاس حل تمرین ← یک هفته در میان / کوئیزها (در هفته سالنه)
به میان‌ترم و پایان‌ترم

اتاق رفع اشکال
تمام طول ترم چهار روز ۱۰ تا ۱۲
ایام کوئیزها، امتحانات ۱۰ تا ۱۶

توجه

هر مسیر در $\mathbb{R}^2$ را می‌توان توسط یک معادله‌ی برداری به صورت زیر مشخص کرد.

$$\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$$

مثال

$$\vec{r}(t) = \left(\cos t, \sin t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مثال

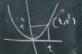
معادله‌ی برداری یک سهمی:

$y = x^2$

معادله‌ی سهمی:

$$\vec{r}(t) = \left(t, t^2\right)$$

$$\vec{r}(x) = \left(x, x^2\right)$$



مثال

$$\vec{r}(t) = \left(\ln t, \tan t\right)$$

$$\vec{r}(t) = \left(f(t), g(t)\right)$$

مثال

$$\vec{r}(t) = (t, t)$$

نتیجه از توجه

اگر روی دو مسیر متفاوت تابع $f(x,y)$ به دو مقدار متفاوت میل کند یا اگر روی یک مسیر $f(x,y)$ بی‌نهایت بزرگ شود آنگاه

① به سمت (a,b)

② اگر زیاد باشد

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \text{ وجود ندارد.}$$

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = (a, b)$$

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = (a, b)$$

$$\vec{r}_1(t) = \left(x_1(t), y_1(t)\right)$$

$$\vec{r}_2(t) = \left(x_2(t), y_2(t)\right)$$

$$\lim_{t\to t_0} f(x_1(t), y_1(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(x_2(t), y_2(t))$$

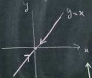
$\Downarrow$

در (a,b) تابع حد ندارد

مثال

نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ حد ندارد.

دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ است.



ابتدا روی خط $y=x$ (یعنی روی مسیر (x,x)) به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم، داریم

$$f(x,x)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ x\neq0}} f(x,x)=0$$

روی مسیر $y=mx$ (یعنی در مسیر (x,mx)) به $(0,0)$ نزدیک شویم.

$$f(x,mx)=\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}$$

$$\lim_{x\to0} f(x,mx)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

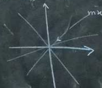
$(x,mx)\to(0,0)$

$x\to0$

بنابراین وقتی روی خط‌های با شیب‌های مختلف به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم تابع به مقادیر مختلفی میل می‌کند پس تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

توجه: اگر روی تمام مسیرهای (x, mx)، $x \to 0$ تابع به عدد یکسانی مانند l میل کند دلیلی نمی‌شود برای این که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$



مثال

نشان دهید تابع $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

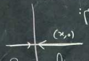
در $(0,0)$ حد ندارد.

پاسخ: اولاً دامنه تابع $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ است.

فرض کنید روی مسیر (x, x) به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم (روی خط $y=x$)

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

فرض کنید روی مسیر $(x, 0)$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم. داریم:



$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به سمت $(0,0)$ به دو حد متفاوت رسیدیم نتیجه می‌گیریم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ موجود نیست.

مثال

تابع $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ را در نظر بگیرید.

حد این تابع را روی تمام مسیرهای $y=mx$ به سمت $(0,0)$ بررسی کنید.

پاسخ

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x m^2 x^2}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 m^2}{x^2(1+m^4x^2)}$$

$$= 0$$

سوال

با توجه به اینکه تابع مثال قبل روی تمام مسیرهای $y=mx$ به عدد 0 میل می‌کند آیا می‌توان گفت که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ؟

پاسخ

فرض کنید که (x,y) روی مسیرهای مختلف (ky^2,y) به $(0,0)$ میل کند.

$x=ky^2$

آن گاه

$$\lim_{y\to 0} f(ky^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{ky^2y^2}{k^2y^4+y^4}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{ky^4}{y^4(k^2+1)} = \frac{k}{k^2+1}$$

بنابراین روی مسیرهای مختلف $x=ky^2$ تابع به اعداد مختلفی میل می‌کند وقتی به $(0,0)$ نزدیک‌تر می‌شویم.

پس $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال

تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ را در نظر بگیرید.

نشان دهید که

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) =$$

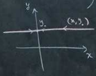
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

ولی $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

پاسخ

بررسی $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$

فرض کنید (x, y_0) (برای یک y_0 ثابت) یک مسیر باشد.



داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y_0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 y_0^2}{x^2 y_0^2+(x-y_0)^2} = 0$$

بنابراین

$$\lim_{y_0\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y_0\to 0} (0) = 0$$

به طور مشابه: $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$

مثال

تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ را در نظر بگیرید.

$(x,0)$

نشان دهید که

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0$$

ولی $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

① روی خط $y=x$ به $(0,0)$ نزدیک شویم:

$$f(x,x)=\frac{x^4}{x^4}=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=1$$

② روی مسیر $(x,0)$ اگر به $(0,0)$ نزدیک شویم

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$$

(۱)،(۲): بنابراین روی دو مسیر متفاوت تابع به دو عدد متفاوت میل می‌کند

پس تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

تعریف

تابع $z=f(x,y)$ را در نقطهٔ (a,b) پیوسته می‌نامیم هرگاه

① تابع در یک همسایگی نقطهٔ (a,b) تعریف شده باشد (شامل (a,b))

② $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$