یادآوری

فرض کنید $f: D \to \mathbb{R}$

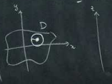
$D \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto f(x,y)$

$z = f(x,y)$

یک تابع دو متغیره باشد.

فرض کنید $(a,b) \in D$.



فرض کنید D شامل یک دیسک باز

(همسایگی باز) شامل (a,b) باشد.

همسایگی باز:

همسایگی باز به شعاع δ

$$B_\delta((a,b)) = \{(x,y) \mid \underbrace{\|(x,y)-(a,b)\|}_{\text{فاصله}} < \delta\}$$

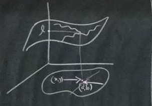
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall (x,y) \left(\begin{array}{c} (x,y)\in B_\delta((a,b)) \wedge \\ (x,y)\neq(a,b) \end{array} \to |f(x,y)-\ell|<\varepsilon \right)$$

و

تعریف می‌کنیم

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall (x,y) \left(0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \to |f(x,y)-\ell|<\varepsilon \right)$$



مثال نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\left(x, y, \frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$z = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

اثبات

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن یک $\delta>0$ به طوری که

$$\forall (x,y)\ \left(0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon\right)$$

به بیان دیگر

$$\forall (x,y)\ \left(0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon\right)$$

چرک‌نویس:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|3x^2|\,|y|}{|x^2+y^2|} \le \frac{3\,|x^2+y^2|\,\sqrt{x^2+y^2}}{|x^2+y^2|} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y| = \sqrt{y^2}$$

مشاهده: برای هر (x,y) اگر $3\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ آن‌گاه $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$.

پایان چرک‌نویس

برای ε داده شده فرض کنید δ عددی دلخواه باشد به طوری که $3\delta<\varepsilon$.

سوال: آیا چنین δای کار می‌کند؟

دارم (x,y) اگر $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta_1$

آنگاه $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta_1 < \varepsilon$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

مثال

نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

$f(x,y) = x$

$z = x$

(x,y,x)

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن $\delta > 0$ به گونه ای

$\forall (x,y) \left(0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \longrightarrow |x-a| < \varepsilon\right)$

چک نویس: $|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

پس واضح است که اگر $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \varepsilon$ آنگاه:

$|x-a| < \varepsilon$

مثال: نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

$f(x,y) = x$

$z = x$

(x,y,x)

فرض کنیم δ_1 عدد دلخواهی باشد به طوری که $\delta_1 < \varepsilon$ (مثلاً $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$) آنگاه اگر $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta_1$ باشد، آنگاه

$$|x-a| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta_1 < \varepsilon$$

بنابراین

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \quad \square$$

مشابهاً: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

ق

فرض کنید $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l_1$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l_2$، l_1, l_2 عدد هستند. آنگاه

① $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \lambda f(x,y) + \gamma g(x,y) = \lambda l_1 + \gamma l_2$

② $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = l_1 l_2$

③ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l_1}{l_2}$ (به شرط اینکه $l_2 \neq 0$)

④ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)^{\frac{m}{n}} = l_1^{\frac{m}{n}}$ هر گاه $l_1^{\frac{m}{n}}$ تعریف شده باشد.

تمرین

فرض کنید $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

نشان دهید که

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0$$

ولی $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

مثال

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}=\frac{3}{1}=3$$

نتیجه اول

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\lambda x^n y^m=\lambda a^n b^m$$

بنابراین اگر $f(x,y)$ یک چندجمله‌ای دو متغیره باشد، مثلاً

$$f(x,y)=7x^5y^6+3x^2+16x^7y^9$$