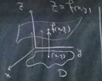
توابع دو متغیره

منظور از یک تابع دو متغیره، تابعی مانند

$f: D\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad z=f(x,y)$

$(x,y)\longmapsto f(x,y)$

است.



$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

منحنی های تراز level curves

نقشه های توپوگرافی

تعریف

منظور از منحنی های تراز تابع $z=f(x,y)$ منحنی هایی هستند که در ارتفاعهای مختلف $z=k$ توسط تابع ایجاد می شوند.

به بیان دیگر هر کدام از این منحنی ها، تصویر اشتراک رویه مورد نظر با یک صفحه $z=k$ روی صفحه xy است.

مثال منحنی های تراز تابع $z=y^2-x^2$ را رسم کنید (حداقل برای مقادیر $z=0,\pm1,\pm\frac{1}{2}$)

مثال: نمودار منحنی‌های تراز تابع

$$z=\frac{-3y}{x^2+y^2+1}$$

را رسم کنید.

$$\begin{cases} z=0 \\ z=\pm 1 \\ z=2 \end{cases}$$

مثال: نمودار منحنی‌های تراز تابع $z=x^2+y^2$ را رسم کنید.

$z=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$

$z=k \Rightarrow x^2+y^2=(\sqrt{k})^2$, $k>0$

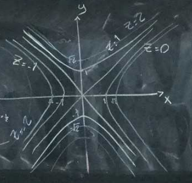
$z=k$, $k<0$ → هیچ شکلی نداریم

$z=1$

$y^2-x^2=1$

$z=2$ داریم

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$



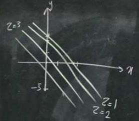
$z=0 \Rightarrow$ معادله $y^2-x^2=0$ را داریم یعنی $y^2=x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$$

$z=1$ معادله $y^2-x^2=1$ را داریم

$z=2$ معادله $y^2-x^2=2$ را داریم.

$$\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$



مثال: نمودار منحنی‌های تراز تابع

$z = 6-3x-2y$

را برای $z=1,2,3$ رسم کنید.

$z=1 \rightarrow 6-3x-2y=1$

$-3x$

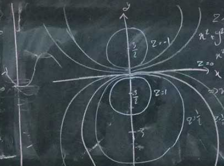
$z=2 \rightarrow 6-3x-2y=2$

$z=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2+6y+1=0$

$x^2+(y+3)^2=8$

$z=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2+12y+1=0$

$x^2+(y+6)^2=35$



$z=2 \Rightarrow$

$x^2+y^2+1+\frac{3}{2}y=0$

$x^2+(y+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+1$

$\Rightarrow x^2+(y+\frac{3}{4})^2=\frac{-7}{16}$

$z=\frac{1}{2}$ $z=\frac{1}{4}$ را رسم کنید شکل

$z=-1 \Rightarrow x^2+y^2+1-3y=0$

$z=\frac{-3y}{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+1=0$

$\Rightarrow x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$

$z=0 \Rightarrow y=0$

$z=1 \rightarrow x^2+y^2+3y+1=0 \Rightarrow x^2+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+1=\frac{-5}{4}$

$x^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$

$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$z = xy \Rightarrow$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$

$= \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \Rightarrow$ سهمی وار هذلولی

دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

توجه

$z = xy$ از دوران یک سهمی وار هذلولی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$z = xy$

$z = 0$

$z = 1 \rightarrow xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$

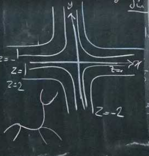
$z = 2 \rightarrow xy = 2 \rightarrow y = \frac{2}{x}$

$z = -1 \rightarrow xy = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{x}$

$z = -2 \rightarrow xy = -2 \rightarrow y = -\frac{2}{x}$

مثال

$z = xy$



تمرین

منحنی های تراز تابع $z = 4x^2 + y^2 + 1$ را رسم کنید $(z > +1)$

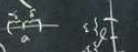
فرض کنید $f: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد.

فرض کنید $(a,b)\in D$

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطهٔ (a,b) تعریف شده باشد.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ \big(0<|x-a|<\delta \to |f(x)-l|<\varepsilon\big)$$

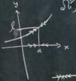


$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x\ p(x)\to q(x)\\ \forall x\ \big(p(x)\to q(x)\big)\end{array}}$$

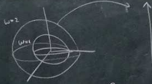
یادآوری

اگر $f: D\to\mathbb{R}$ در یک بازهٔ باز حول نقطهٔ $a\in D$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x)=l$ هرگاه

تابع f به هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک شود به شرط اینکه x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شده باشد.

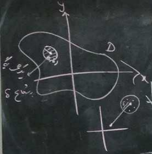


رویه‌های تراز



$$w = f(x,y,z)$$

$$w=k \qquad f(x,y,z)=k$$



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall (x,y) \left(0 < \underbrace{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}_{\text{فاصله } (x,y) \text{ از } (a,b)} < \delta \rightarrow |f(x,y)-l| < \varepsilon \right)$$

هرگاه مقادیر $f(x,y)$ به هر اندازه دلخواه به l نزدیک شوند

هرگاه مقادیر (x,y) به اندازه کافی به (a,b) نزدیک شده باشند

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x,y \left(\text{اگر فاصله } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ از } \delta \text{ کمتر باشد} \rightarrow |f(x,y)-l| < \varepsilon \right)$$

می‌گوییم تابع f وقتی (x,y) به (a,b) میل کند به عدد l میل می‌کند