تعریف

اگر $u=(a,b,c)$ یک بردار یکه باشد و $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد

$$D_{\vec u} f(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,\,y_0+bh,\,z_0+ch)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ و $\vec u=(a,b)$ یکه

$$D_{\vec u} f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,\,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

اگر تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر باشد آن‌گاه f در نقطه (x_0,y_0) در جهت $\vec u = (a,b)$ مشتق‌پذیر است

$$D_{\vec u} f(x_0,y_0)=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{\nabla f}\cdot(a,b)$$

$$D_{\vec u} f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\vec u \qquad ★$$

بنابراین اگر تابع در یک جهت خاص مشتق سوئی نداشته باشد، آن‌گاه

★ در آن جهت خاص دیفرانسیل‌پذیر نباشد

آن‌گاه f دیفرانسیل‌پذیر نیست

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$u=(a,b,c)$

$$D_{\vec u} f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\vec u=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z)$$

بنام خدا

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\nabla f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$

$|\nabla f|\,|u| \cos\theta$

توجه از رابطه

$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$

نتیجه می‌گیریم که تابع f در نقطه (x,y,z) در جهت بردار $\nabla f(x,y,z)$ حداکثر میزان تغییرات را دارد و میزان تغییر $\|\nabla f\|$

مثال

فرض کنید دما در هر نقطه توسط رابطه

$$T(x,y,z) = \frac{80}{1+x^2+y^2+z^2}$$

محاسبه شود. در نقطه $(1,1,-2)$ در

کدام جهت حداکثر افزایش دما را داریم؟ میزان این تغییرات چقدر است؟

نشان دادیم که گفته شد تابع f در جهت بردار گرادیان حداکثر میزان افزایش را دارد.

جهت بیشترین تغییرات $\nabla f(1,1,-2)$.

اندازه بیشترین تغییرات $= \|\nabla f(1,1,-2)\|$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(-)\right)$$

$$= \left(\frac{-2x \times 80}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2y \times 80}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2z \times 80}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

در نقطه $(1,1,-2)$

$$\left(\frac{-160}{49}, \frac{-160}{49}, \frac{+2\times 160}{49}\right)$$

[illegible]

مثال در $\mathbb{R}^2$

معادله پارامتری بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ را بنویسید.

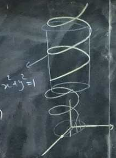
$x = 2\cos t$

$y = 3\sin t$

معادله پارامتری خط

$\vec{r}(t) = (x,y,z) + t(a,b,c)$

$= (x+ta,\ y+tb,\ z+tc)$



$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{r}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

مثال $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$x^2+y^2=1$

توجه

یک منحنی فضایی در $\mathbb{R}^3$ دارای معادله پارامتری به صورت زیر است

به نام خدا

میزان تغییرات تابع در این جهت $\|\nabla f\|$ است

برابر با

$\left\|\left(\frac{-160}{49}, \dots, \dots\right)\right\|$

به نام خدا

فرض کنید که $F(x,y,z)=k$ معادله‌ی یک رویه تراز باشد

$$w=F(x,y,z)$$

یادآوری

$$z=f(x,y)$$

$$k=f(x,y)$$

به هر معادله‌ی $k=f(x,y)$ یک منحنی تراز گفته می‌شود.

$$\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

$$\vec r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

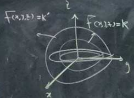
مثال $\vec r(t)=(\cos t,\sin t,t)$

$$x^2+y^2=1$$

مفهوم رویه تراز را داریم

مثل بالا برای توابع

$$F(x,y,z)=\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$



فرض کنید رویه $F(x,y,z)=k$ را داشته باشیم

فرض کنید $\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ یک منحنی واقع در رویه باشد که از نقطه (x_0,y_0,z_0) می‌گذرد

بنابراین

$$F(x(t),y(t),z(t))=k$$

از معادله بالا برحسب t مشتق بگیرید.

$$F \to x,\ y,\ z \to t$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\,y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,z'(t)=0$$

بنابراین

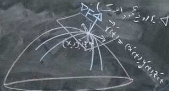
$$\nabla F(x,y,z) \perp (x'(t),y'(t),z'(t))$$

اگر $\vec{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ یک منحنی فضایی باشد آنگاه

$$\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

پس ∇F بر صفحه مماس بر رویه عمود است

(∇F بر رویه عمود است)



به نام خدا

به طور خاص رویه‌ی $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید: معادله رویه را به صورت زیر بنویسید:

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$$

بردار عمود بر رویه $\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$

$\vec{n}=(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

معادله صفحه مماس بر رویه‌ی $: z=f(x,y)$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+z-z_0=0$$

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$