یادآوری

فرض کنید $\vec{u}=(a,b)$ یک بردار یکه باشد.

مشتق تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ (x_0,y_0) در جهت بردار $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah,\, y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

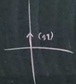
$$(x_0,y_0) \xrightarrow{\vec{u}} (x_0,y_0)+h(a,b)$$

به طور خاص اگر $\vec{u}=(1,0)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

همچنین اگر $\vec{u}=(0,1)$

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$



قضیه

اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه تابع f در نقطه (x_0,y_0) در جهت هر بردار دلخواه $\vec{u}=(a,b)$ مشتق پذیر است و داریم:

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,b$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}\cdot(a,b)$$

توجه ۱) عکس گفته بالا برقرار نیست:

یعنی ممکن است که تابع f در نقطه (x_0,y_0) در تمام جهات مشتق پذیر باشد ولی در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر نباشد. (بعداً مثال خواهیم زد)

توجه ۲

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

نابلا $\nabla f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$(x_0,y_0)\longmapsto\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

نیاز است (درصورتی که f دیفرانسیل‌پذیر باشد)

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

<u>مثال</u>

مشتق تابع $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$ را در جهت بردار یکه‌ای که با محور x زاویه $\theta=\frac{\pi}{6}$ می‌سازد، محاسبه کنید (در نقطه $(3,4)$)

$$\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u} = \left(3x^2-3y, -3x+8y\right)\Big|_{(3,4)} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= (27-12, -9+32)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$(27-12)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-9+32)\cdot\frac{1}{2}$$

مثال

نشان دهید که $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$

در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست و فرمول

$$D_{\vec{u}} f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\vec{u}$$

برای این تابع کار نمی‌کند.

پاسخ: فرض کنید $\vec{u}=(a,b)$ یک بردار یکه دلخواه باشد.

توجه: از آنجا که درباره دیفرانسیل‌پذیری تابع اطلاع نداریم

نمی‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم (اگر استفاده کنیم به جواب غلط می‌رسیم)

$$D_{\vec{u}} f(x,y)=\nabla f\cdot\vec{u}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(a,b)$$

استفاده مستقیم از تعریف

$$D_{\vec{u}=(a,b)} f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(ah,bh)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{ab}}{h}$$

دقت کنید که حد فوق تنها در صورتی وجود دارد که $ab=0$ (یعنی یا $a=0$ یا $b=0$).

بنابراین تابع فوق تنها در جهت $\vec{u}=(1,0)$ و $\vec{u}=(0,1)$ و $\vec{u}=(-1,0)$ و $\vec{u}=(0,-1)$ مشتق سویی دارد.

مثال

[redacted]

نشان دهید که

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست و فرمول

(*) $$D_{\vec u} f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\vec u$$

برای این تابع کار نمی‌کند.

اثبات کنید که

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=D_{\vec u=(1,0)} f(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=D_{\vec u=(0,1)} f(0,0)=0$$

پس اگر فرمول (*) برقرار باشد:

$$D_{\vec u=(a,b)} f(0,0)=(0,0)\cdot(a,b)=0$$

و دیدیم که مشتق سوئی در تمام جهات صفر نیست.

ادامه

اثبات عدم دیفرانسیل‌پذیری تابع در $(0,0)$.

یادآوری

برای دیفرانسیل‌پذیری تابع در نقطه $(0,0)$ باید حد زیر موجود باشد و برابر با صفر باشد.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=?$$

مسیر $h_1=h_2$ را در نظر بگیرید

$$\lim_{h_1\to0}\frac{\sqrt[3]{h_1^2}}{\sqrt{2}\,|h_1|}$$

وجود ندارد

بنابراین تابع دیفرانسیل‌پذیر نیست.

مثال: مشتق تابع $f(x,y)=x^2y^3-4y$

$$\underbrace{\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}}_{\text{غیر یکه}}$$

را در جهت بردار

در نقطه $(2,-1)$ محاسبه کنید

تبدیل بردار $\vec{v}$ به یک بردار یکه:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|v\|}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

$$D_{\vec{u}}(2,-1)=\left(2xy^3,\ 3x^2y^2-4\right)\Big|_{(x,y)=(2,-1)}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=$$

$$=(-4,8)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=$$

$$\frac{-8}{\sqrt{29}}+\frac{40}{\sqrt{29}}=\ldots$$

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

سوال

① در چه جهت‌ها تابع f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟

② آیا تابع در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

پاسخ

فرض کنید $\vec{u}=(a,b)$ یک بردار یکه دلخواه باشد:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(ah,bh)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{abh^2}{\sqrt{(a^2+b^2)h^2}\,h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{abh^2}{\sqrt{a^2+b^2}\,|h|h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{abh}{\sqrt{a^2+b^2}\,|h|}$$

اگر $ab\neq0$ حد بالا به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{abh}{\sqrt{a^2+b^2}\,|h|}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\\[2ex] \lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{abh}{\sqrt{a^2+b^2}\,|h|}=\dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

بنابراین اگر $ab\neq0$ تابع در نقطه $(0,0)$ در جهت (a,b) مشتق سویی ندارد.

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

سوال

① در چه جهت‌هایی تابع f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟

② آیا تابع f در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

هم‌چنین اگر $ab=0$ حد وجود دارد و برابر با صفر است.

بنابراین تابع در جهات $\pm i$ و $\pm j$ دارای مشتق سوئی است.

ادامه سوال آیا تابع f در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

اگر تابع f دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه در هر جهتی دارای مشتق سوئی است و مشتق سوئی آن از رابطه (*) محاسبه می‌شود:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\cdot(a,b)=$$

$$=0\neq$$ حد بالا نشد

پس تابع f در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست.

تعمیم مفاهیم فوق برای توابع سه متغیره

$w = f(x,y,z)$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Df : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

برای دیفرانسیل پذیری در (x_0,y_0,z_0) حد زیر وجود داشته و مساوی صفر شود

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) - f(x_0,y_0,z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}h_2 - \frac{\partial f}{\partial z}h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

در صورت دیفرانسیل پذیری

$$D_{\vec{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot(a,b,c)$$

$\vec{u} = (a,b,c)$

مثال

مشتق تابع $f(x,y,z) = x\sin(yz)$ در جهت $\underbrace{\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}$ را حساب کنید

تبدیل به یکه کن