دیفرانسیل توابع سه متغیره

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$w = f(x, y, z)$

$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$

قاعده زنجیره‌ای

مثال

$u = x^4 y + y^2 z^3$

$\parallel$

$u(x, y, z)$

$x = rse^t$

$y = rs^2 e^t$

$z = r^2 s \sin t$

$\frac{\partial u}{\partial s} = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = (4x^3 y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^t) + (3y^2z^2)(r^2 \sin t) = (rse^t)^4 + (2rs^2e^t)(r^2 s \sin t)^3(\dots)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

مشتق‌گیری ضمنی (توابع تک متغیره)

معادلهٔ صریح $y=f(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

فرض کنید که بدانیم که y تابعی از x است. هر معادله‌ای به صورت زیر یک معادلهٔ ضمنی گفته می‌شود:

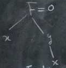
$$F(x,y)=0$$

هدف: محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$ با استفاده از مشتق جزئی توابع دو متغیره

$$F(x,y)=0$$

$$dF=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$



$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\partial F/\partial y}$$

قضیه تابع ضمنی

فرض کنید F (دو متغیره) در یک دیسک شامل (a,b) تعریف شده باشد.

$$F(a,b)=0$$

$$F_y(a,b)\neq 0$$

F_x, F_y در آن دیسک پیوسته باشند

آن‌گاه معادله ضمنی $F(x,y)=0$ y را به صورت تابعی از x ارائه می‌دهد به طوری که

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مثال

فرض کنید y تابعی مشتق‌پذیر از x باشد و داشته باشیم

$$x^3+y^3=6xy$$

مطلوب است محاسبه

$$\frac{dy}{dx}$$

راه حل اول

جب مشتق

$$x^3+y^3-6xy=0 \Rightarrow$$

$$3x^2+y'(x)\times 3y^2-\left(6y+6xy'(x)\right)=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2y'-6y-6xy'=0 \Rightarrow$$

$$y'(3y^2-6x)=-3x^2+6y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+6y}{3y^2-6x}$$

راه دوم

$$F(x,y)=x^3+y^3-6xy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{-(3x^2-6y)}{3y^2-6x}$$

مشتق گیری ضمنی (۳ متغیره)

فرض کنید که بدانیم که z متغیری برحسب x و y است

و وابستگی z به x و y طی یک معادله‌ی ضمنی به صورت

زیر داده شده باشد:

$$F(x,y,z) = 0$$

معادله‌ی صریح:

$$z = f(x,y)$$

معادله‌ی ضمنی

$$F(x,y,z) = 0$$

$$F(x,y,z) = 0$$

z تابعی از x و y

هدف: محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$

$-y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \times 0 +$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مثال

فرض کنید که z تابعی از دو متغیر x و y باشد و میدانیم که

$$y^2 + x\ln y = z^2$$

مطلوب است محاسبه

$$\frac{\partial z}{\partial y} , \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f(x,y,z) = y^2 + x\ln y - z^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln y}{-2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-\left(2y + \frac{x}{y}\right)}{-2z}$$

بدون استفاده از قضیه

$$\underbrace{y^2 + x\ln y}_{} - z^2 = 0 \xrightarrow{x\ \text{جز}}$$

$$\ln y - \frac{\partial z}{\partial x} 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln y}{-2z}$$

مثال

z تابعی از x, y

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+6xyz-1=0$$

مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-(3x^2+6yz)}{3z^2+6xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}=\cdots$$

تمرین: فرض کنید که z تابعی از x, y باشد

و

$$f(z-3x,z-2y)=1$$

نشان دهید که

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=6$$