یادآوری

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد

گفتیم که $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\Delta z \simeq dz$$

$$dz = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

توجه

اگر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ حول نقطه مورد نظر پیوسته باشند آنگاه z دیفرانسیل پذیر است (اما اگر z دیفرانسیل پذیر باشد دلیلی بر پیوستگی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ نیست.)

مثال

یک تقریب خطی برای تابع $z=1+x\ln(xy-5)$ حول نقطه $(2,3)$ بنویسید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = \overset{0}{\ln(1)} + 6 = 6$$

معادلات خط :

$ax + by + c = 0$

$ax + by + cz + d = 0$

$ax + by + cz + dw + e = 0$

$z - 1 = 6(x-2) + 4(y-3)$

f تقریب خطی برای تابع f

معادله بالا

حول نقطه (2,3) است.

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

حول نقطه (2,3) :

$f(2,3) = 1$

از طرفی توابع $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

حول نقطه (2,3) پیوسته هستند

بنابراین تابع z (برحسب x, y)

در (2,3) دیفرانسیل‌پذیر است.

$z = 1 + x\ln(xy-5)$

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{xy-5}$

$\frac{\partial z}{\partial y}(2,3) = \frac{4}{1} = 4$

یادآوری

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

① نشان دهید که f در مبدأ دیفرانسیل‌پذیر است، اما

② مشتقات جزئی آن در مبدأ پیوسته نیستند.

توجه: تابع f در نقطهٔ $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است هرگاه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ هر دو موجود باشند و به علاوه داشته باشیم

$$\lim \frac{\overbrace{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)}^{\Delta z}-\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}^{dz}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}=0$$

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

تمرین 0

بررسی دیفرانسیل پذیری

برای اثبات دیفرانسیل پذیری باید نشان دهیم که

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

یعنی باید نشان دهیم که

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

[illegible]:

$$0 \le \left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le \sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

از طرفی $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$ پس بنا به فشردگی

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

بنابراین تابع ما در نقطه $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

قسمت دوم سوال

بررسی عدم پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ تابع در $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

قبلاً حساب کردیم که $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\underbrace{2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{h(x,y)} + \underbrace{\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}\right)\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x^2+y^2)}_{k(x,y)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

☆

پس اگر ★ برقرار باشد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0$$

(الزام)

باید داشته باشیم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} K(x,y)=0 .$$

$$K(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

سوال آیا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} K(x,y) \overset{?}{=} 0$$

مسیر $x=y$ را در نظر بگیرید

$$\lim_{x\to 0^+} K(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{2}\,|x|} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,x}\right).$$

حد بالا وجود ندارد، پس $\lim_{(x,y)\to(0,0)} K(x,y)$ وجود ندارد، پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

قاعده زنجیره‌ای

$$\left(f(g(x))\right)' = g'(x)\, f'(g(x))$$

حالت اول

فرض کنید $y(t)$, $x(t)$ توابعی تک متغیره باشند:

$$x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد

$$z(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

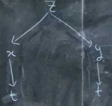
پس تابع زیر را داریم:

$$z(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

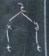
هدف محاسبهٔ $\frac{dz}{dt}$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



مثال



$$z = x^2 y + 3xy^4$$

$$x(t) = \sin 2t$$

$$y(t) = \cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)(2\cos(2t)) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

$$= (2\sin 2t \cos t + 3\cos^4 t)(2\cos(2t)) + (\sin^2 2t + 12\sin 2t \cos^3 t)(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dx} \neq \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

(اثبات کنید)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}{dx}}{\frac{\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}{dy}}$$

توجه

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

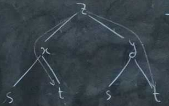
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$z = f(x, y)$

$x = x(s, t)$

$y = y(s, t)$

$z(x(s,t), y(s,t)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



حالت دوم

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

[illegible] $\frac{\partial z}{\partial t}$ [illegible]

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$(e^{x}\sin y)(t^2) + (e^{x}\cos y)(2st) =$$

$$e^{st^2}\sin(s^2t)(t^2) + e^{st^2}\cos(s^2t)(2st)$$

[illegible]

$z = e^{x}\sin y$

$x = st^2$

$y = s^2t$

$\frac{\partial z}{\partial s} = ?,\quad \frac{\partial z}{\partial t} = ?$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \times 2r\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\times(2r) + 2\,\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right) 2r + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2r)\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(2s)\right) =$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(2r) + \frac{\partial f}{\partial y}(2s)$$

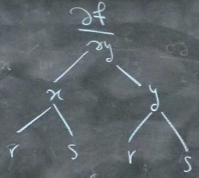
$z = f(x, y)$

$x = r^2 + s^2$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial r} = ?$

$y = 2rs$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = ?$

dir

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}$$



$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \times 2s\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \times 2s + 0$$