کلاس حل تمرین

ویژه گروه اول

از امروز تا چهارشنبه

هر روز ساعت ۱۲-۱۳

تالار ۳

تمرین

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+|xy|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی f را در $(0,0)$ بیابید.

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=?$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$$

بدست $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

اگر $(x,y)\neq(0,0)$ آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3(x^2+y^2)-2y\,x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

و بدست $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

کلاس حل تمرین
دو گروه اول
از امروز تا چهارشنبه
هر روز ساعت ۱۲-۱۳
تالار ۳

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1$$

دیفرانسیل پذیری

یادآوری

فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع تک متغیره y باشد.

$dy = f'(x)\,dx$ دیفرانسیل

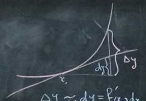
معادل خطاکس:

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x$$

کلاس حل تمرین
ویژهٔ گروه اول
از امروز تا چهارشنبه
هر روز ساعت ۱۲-۱۳
تالار ۳

تابع f در نقطهٔ x_0 دیفرانسیل پذیر است
هرگاه حول نقطهٔ x_0 معادلهٔ خط
مماس تقریب مناسبی برای تغییرات تابع
باشد

$\Delta y \approx dy$
حول نقطهٔ x_0



$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\,dx$

<u>تعریف</u>: تابع f در x_0 دیفرانسیل پذیر است هرگاه

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$$

$\varepsilon(h) = \ldots$, $\quad f'(x_0)h = \alpha h$

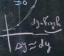
$$\begin{cases} f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h = h\,\varepsilon(h) \\ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

دیفرانسیل پذیری $z=f(x,y)$

تابع دو متغیره $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را در نقطهٔ (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر می‌نامیم هرگاه

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}^{\Delta z} - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}h_2}^{\text{خطا}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

کلاس حل تمرین
ویژه: [illegible] اول
از امروز تا چهارشنبه
هر روز ساعت ۱۲-۱۳
تالار ۳



$\Delta y \simeq dy$

به بیان دیگر تابع f در (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر است هرگاه α_1, α_2 موجود باشند به طوری که

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\alpha_1 h_1-\alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

$\alpha_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ، $\alpha_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

increment

قضیه (نمو)

تابع f در نقطهٔ (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر است

هرگاه توابع (دو متغیره) $\varepsilon_1(h_1,h_2)$ و $\varepsilon_2(h_1,h_2)$

چنان موجود باشند که در یک همسایگی (x_0,y_0) داشته باشیم

$$\begin{cases} f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2=\varepsilon_1(h_1,h_2)h_1+\varepsilon_2(h_1,h_2)h_2 \\ \lim_{(h_1,h_2)\to 0}\varepsilon_1=0 \quad \lim_{(h_1,h_2)\to 0}\varepsilon_2=0 \end{cases}$$

روش اثبات

$$\begin{cases} f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}h_1-\frac{\partial f}{\partial y}h_2=\varepsilon(h_1,h_2)\sqrt{h_1^2+h_2^2} \\ \lim_{(h_1,h_2)\to 0}\varepsilon(h_1,h_2)=0 \end{cases}$$

به صورت ذکر شده در قضیه قابل تبدیل است

کلاس حل تمرین

[illegible] اول

از امروز تا چهارشنبه

هر روز ساعت ۱۲-۱۳

تالار ۳

$dy = f'(x)\,h$

$\Delta y \simeq dy$

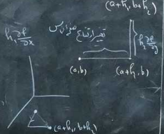
توجه

اگر تابع $z=f(x,y)$ دیفرانسیل پذیر باشد

دیفرانسیل کلی آن را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\Delta z \simeq dz$$



$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

نکته مهم

① اگر $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0)$$

$$\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)\right)$$

کلاس حل تمرین

گروه اول

از امروز تا چهارشنبه

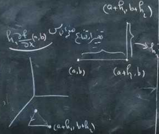
هر روز ساعت ۱۲-۱۳

تالار ۳

dy-Right

$\Delta y \approx dy$

۵) اگر توابع f_x , f_y حول نقطه (x_0,y_0) **پیوسته** باشند تابع f در (x_0,y_0) دیفرانسیل‌پذیر است.



$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

مثال

نشان دهید تابع زیر در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

کلاس حل تمرین
[illegible] گروه اول
از امروز تا چهارشنبه
هر روز ساعت ۱۲-۱۳
تالار ۳

$dy = f'(x)h$

$\Delta y \approx dy$

حدی که وجودش باعث دیفرانسیل پذیری می‌شود:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

ادعا می‌کنیم که حاصل حد مورد نظر برابر صفر است.

و

$$\left|\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| < \frac{\cancel{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}{\cancel{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,(h_1^2+h_2^2)}$$

$$=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\sqrt{h_1^2+h_2^2}=0$$

پس

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left|g(h_1,h_2)\right|=0$$

به عنوان تمرین بررسی کنید که آیا $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مثال قبل در $(0,0)$ پیوسته هستند؟

مثال

آیا تابع زیر در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر است؟

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

توجه کنید $dz=0$ (یعنی صفحه $z=0$) تقریب خوبی برای این تابع نیست زیرا

مقدار تابع روی خط $y=x$ برابر با 1 است

اثبات عدم دیفرانسیل پذیری

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{2h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$$

روی مسیر $h_1=h_2=h$ داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{2h^2\sqrt{2}\,|h|}=\infty$$

پس حد مورد نظر وجود ندارد. پس تابع دیفرانسیل پذیر نیست

بررسی پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0,0)$ در مثال قبل

مثال

آیا تابع زیر در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2y(x^2+y^2) - 2x\,2xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[illegible]

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{-2yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

آیا $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0,0)$ پیوسته است؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

مسیر $y=mx$ را در نظر بگیرید

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2mx^3 + 2m^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3(-m+m^3)}{x^4(1+m^2)^2}$$

اگر $m^3 = m$ $(m=1,0,-1)$ حد بالا صفر است در غیر این صورت این حد وجود ندارد.

توجه

عدم پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجب عدم دیفرانسیل‌پذیری نمی‌شود.

(ق: اگر $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته باشند $\Leftarrow$

مثال

$$f(x,y)=xe^{xy}$$

یک تقریب خطی برای تابع حول نقطهٔ $(1,0)$ بنویسید.

توجه

f دیفرانسیل‌پذیر است.

$$f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$$

$$f_y(x,y)=x^2e^{xy}$$

$$f_x(1,0)=e^0=1$$

$$f_y(1,0)=1$$

توابع f_x و f_y در همه‌جا بخصوص حول $(1,0)$ پیوسته هستند. پس تابع f در $(1,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

$$\underbrace{f(1+h_1,0+h_2)}_{\Delta z} \approx dz = 1h_1+1h_2$$

$$z-1 = 1(x-1)+1(y)$$

$$z = x+y$$ تقریب تابع

$$z=xe^{xy}$$ یک تقریب خطی برای تابع

حول نقطهٔ $(1,0)$ است.