اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات جزئی

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$z = f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

یادآوری

اگر f_{xy} و f_{yx} هر دو در یک همسایگی از (a,b) پیوسته باشند آنگاه

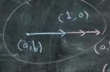
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

مشتقات جزئی:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left((a,b)+h(1,0)\right) - f(a,b)}{h}$$

یادآوری



$(a,b)+h(1,0) =$

$(a+h,b)$

اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات جزئی

$p \to q \Leftrightarrow$ p شرط کافی برای q است $\Leftrightarrow$ q شرط لازم برای p است

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

نشان دهید که

$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

$f_{xy}(0,0)$ می‌خواهیم از تابع f_x نسبت به y در نقطه $(0,0)$ مشتق بگیریم

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$$

می‌شود: f_x در نقاط غیر $(0,0)$.

$$(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f_x(x,y)=\frac{\left[y(x^2-y^2)+2x(xy)\right]\left[x^2+y^2\right]-(2x)(xy)(x^2-y^2)}{}$$

$$=\frac{\left(yx^2-y^3+2x^2y\right)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{yx^4+\cancel{y^3x^2}+\cancel{2x^4y}+\cancel{y^3x^2}-y^5+2x^2y^3-\cancel{2x^4y}+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات جزئی

می‌یابیم f_x در نقطه $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(h,0)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

خلاصه:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

می‌یابیم $f_{xy}(0,0)$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$f_{xy}(0,0)=-1$$

مشابهاً $f_{yx}(0,0)$ را می‌یابیم

تحقیق کنید که

$f_{yx}(0,0)=1$

بنابراین

$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات جزئی

تمرین

فرض کنید

$$u(x,y)=e^{x}\cos y$$

$$v(x,y)=e^{x}\sin y$$

نشان دهید که

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$v_{xx}+v_{yy}=0$$

ادامه درس

فرض کنید f_x ، f_y در یک همسایگی نقطه (a,b) پیوسته است.

هدف بدست آوردن معادله صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه (a,b).

$z=f(x,y)$

توجه ①

صفحه مماس بر یک رویه در یک نقطه شامل تمامی خطهای مماس بر تمامی منحنی‌های واقع بر رویه است که از آن نقطه می‌گذرند.

توجه ②

معادله کلی صفحه به صورت زیر است:

$$z-z_0=\underline{A}(x-a)+B(y-b)$$

اگر صفحه را با صفحه $y=b$ تقاطع بدهیم

$y=y_0$

معادله خط مماس بر منحنی ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} z-z_0=\dfrac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x-a) \\ y=b \end{cases}$$

بنابراین

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$$

اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات جزئی

مثال

معادله صفحه مماس بر سهمی‌وار بیضوی $z=x^2+y^2$ را در نقطه $(1,1,2)$ بنویسید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=2x\Big|_{x=1}=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=2y\Big|_{y=1}=2$$

$$z-2=2(x-1)+2(y-1)$$

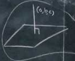
$z=f(x,y)$

بردار عمود بر صفحه مماس بر رویه در نقطه (a,b) به صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),-1\right)$$

بردار عمود بر رویه

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$$



توجه

بردار

$ax+by+cz=d$

تغییرات ارتفاع صفحه مماس

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x)+\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta y)$$

شیب‌ها با قرار دادن $x=a$ می‌رسیم:

$$B=\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)$$

پس معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه (a,b) به صورت زیر است:

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-b)$$

اطلاعیه: کوئیز اول تا سر مشتقات

توجه

اگر صفحهٔ مماس به یک رویه تقریب خوبی برای تغییرات آن رویه حول یک نقطه باشد می‌گوییم تابع مورد نظر در آن نقطه دیفرانسیل‌پذیر است و خواهیم نوشت:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

مثال

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

نشان دهید که f_x ، f_y در $(0,0)$ موجود هستند. بررسی کنید که آیا معادلهٔ صفحهٔ مماس در $(0,0)$ تقریب ...

... مناسبی برای تابع است؟

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$$

پس معادلهٔ صفحهٔ مماس

$$z = 0$$

توجه کنید که روی خط $y=x$ مقدار تابع برابر است با $\frac{1}{2}$.

پس در هیچ جا صفحهٔ مماس تقریب خوبی از تابع نیست.