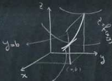
یادآوری

مشتق جزئی تابع $z=f(x,y)$

در نقطهٔ (a,b) نسبت به متغیر x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$



شیب این خط $=\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$

توجه

مشتق جزئی حالتی خاص از مشتق سوئی است.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ در واقع مشتق z در جهت بردار $(1,0)$ است.

وجود مشتق جزئی باعث پیوستگی تابع نمی‌شود.

مثال بیضی‌وار

$4x^2+2y^2+z^2=16$

صفحهٔ $y=2$ را در یک بیضی قطع می‌کند

معادلهٔ خط مماس بر این بیضی را در نقطهٔ $(1,2,2)$ بیابید.

شیب خط مماس در نقطهٔ $(1,2,2)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$

از معادلهٔ $4x^2+2y^2+z^2=16$ برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$8x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

تابع بالا در $(0,0)$ پیوسته نیست

زیرا روی مسیر $y=x$ به سمت مبدأ مقدار تابع 0 است ولی روی مسیر $y=0$ مقدار تابع 1 است

$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ موجود است

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

مثال برای وجود مشتق های جزئی در عدم پیوستگی.

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & xy=0\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

راه حل دوم

$$y=2 \Rightarrow 4x^2+z^2=8$$

ادامه به روش‌های ریاضی 1

معادله خط مورد نظر:

$$\begin{cases}z-2=-2(x-1)\\ y=2\end{cases}$$

$$8x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$(1,3,2)$

$$8+4\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=-2$$

به طور مشابه $\frac{\partial f}{\partial y}$ را حساب کنید.

بررسی پیوستگی تابع در مبدأ:

مسیر $y=x$ را به سمت مبدأ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=\infty$$

پس تابع در مبدأ پیوسته نیست.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{3x^2y(x^6+y^2)-6x^5(x^3y)}{(x^6+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $(x,y)\neq(0,0)$ باشد.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2y(x^6+y^2)-6x^5(x^3y)}{(x^6+y^2)^2}$$

محاسبه مشتق جزئی برحسب x در نقطه $(0,0)$

① ضابطه f_x و f_y را بیابید.

② نشان دهید که f در مبدأ پیوسته نیست.

به طور مشابه $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$.

مثال دیگری برای [illegible]:

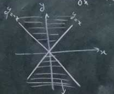
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases} x & |x|\le|y| \\ -x & |x|>|y| \end{cases}$$

مشتقات جزئی را در مبدأ حساب کنید و نشان دهید که تابع فوق در مبدأ پیوسته است.

حل: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:



$|x|\le|y|$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

اثبات پیوستگی در مبدأ

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

هدف: پیدا کردن $\delta>0$ به طوری که

اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ آن گاه $|f(x,y)|<\varepsilon$.

قرار دهید $\delta<\varepsilon$.

حال اگر $\sqrt{x^2+y^2}<\delta<\varepsilon$ آن گاه

$\{\sqrt{x^2+y^2}<\delta\}$

$$|f(x,y)|=|x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta<\varepsilon.$$

به بیان دیگر:

$$0 \le |f(x,y)| = |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

از آنجا که تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ نابر فشردگی

لذا: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

گفتیم که $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ یک تابع دومتغیره است. تعریف می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = f_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) :=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22}$$

برخی از نمادهای ماتریسی استفاده می کنند

$$z = f(x,y)$$

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$f'' = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

مثال

$$f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$$

$$f_x=3x^2+2xy^3$$

$$f_y=3x^2y^2-4y$$

$$f_{xx}=6x+2y^3$$

$$\boxed{f_{xy}=6xy^2}$$

$$f_{yy}=6x^2y-4$$

$$\boxed{f_{yx}=6xy^2}$$

تمرین مشتقات جزئی مرتبه دوم توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$$

$$f(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x$$

$$f(x,y)=xe^y+y+1$$

قضیه اویلر

فرض کنید f_{xy} و f_{yx} در یک (دیسک) به مرکز (a,b) پیوسته باشند آنگاه

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

روش اثبات با استفاده از قضیه مقدار میانگین است

مثال در توابع زیر محاسبه f_{xy} راحت‌تر است یا f_{yx}:

$$x\ln(xy)$$

$$x\sin y+e^y$$

توجه: شرط پیوستگی f_{xy} و f_{yx} در قضیه قبل لازم است.

مثال:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

نشان دهید که

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

معادله صفحه

$$ax+by+cz = ax_0+by_0+cz_0$$

$$\boxed{z-z_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0)}$$

$z=f(x,y)$ معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه (a,b) بصورت زیر است:

$$z-z_0 = f_x(a,b)(x-x_0)+f_y(a,b)(y-y_0)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$