به نام خدا

توجه: تابع حقیقی a^x تنها برای $a>0$ تعریف شده است:

$$a^x = e^{x\ln a} \qquad (a>0)$$

تمرین (حل مجدد)

نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

در $(0,0)$ حد ندارد.

انتخاب مسیر:

$$x^3+y^3 = x^5$$

$$y = \sqrt[3]{x^5-x^3} \qquad x\in(-1,0)$$

این مسیر بسمت $(0,0)$ میل می‌کند.

روی مسیر یادشده داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\left(\sqrt[3]{x^5-x^3}\right)^2}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x^2}\left(x^5-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\cancel{x^5}\,x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(x^5-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(x^3\left(x^2-1\right)\right)^{\frac{2}{3}}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(-x^3\left(1-x^2\right)\right)^{\frac{2}{3}}}{x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x^2}\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{\cancel{x^3}\,x} = \infty$$

در این مسیر تابع حد ندارد.

به نام خدا

تمرین

مجموعهٔ نقاطی را رسم کنید که فاصلهٔ آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحهٔ yz باشد.

تمرین

پیوستگی تابع زیر را در $(0,0)$ بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y\sin x^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

تمرین

به ازای کدام مقادیر α تابع زیر در $(0,0)$ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|y|^{\alpha}x^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

درس جدید

مشتق پذیری و دیفرانسیل پذیری

یادآوری

فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد و a نقطه‌ای درون دامنه‌اش

تابع باشد.

مشتق تابع f در نقطهٔ a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعبیر هندسی: شیب خط مماس

یادآوری

معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$:

$f(a)=b$

$$y-b=f'(a)(x-a)$$

$$\Delta y=f'(a)\Delta x$$

تغییر در خط مماس

اگر تابع در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد
در یک همسایگی کوچک a مقدار تابع
را می‌توان با استفاده از خط مماس
تقریب زد.

$$\Delta y \simeq dy = f'(a)\Delta x$$

$$f(x)-f(a) \simeq f'(a)(x-a)$$

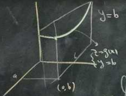
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

تعریف

فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. فرض کنید (a,b) نقطه‌ای در دامنهٔ تابع باشد. مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x در نقطهٔ (a,b) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

round d



آن گاه

$$g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

بیان دیگر:

فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع باشد و (a,b) نقطه‌ای در دامنه‌ی این تابع باشد.

تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(x)=f(x,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

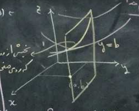
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

صفحه‌ی $y=b$ را با رویه‌ی $z=f(x,y)$ تقاطع بدهید:

شیب خط مماس بر l در نقطه‌ی $x=a$ برابر است با:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=$$

$z=f(x,y)$ ←



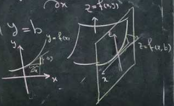
بخشی از رویه که روی صفحه است

معادله منحنی

$$l=\begin{cases} z=f(x,b)=g(x) \\ y=b \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$\begin{cases} z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) \\ y=b \end{cases}$$

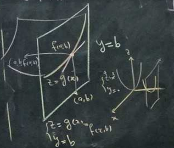


پس معادله خط مماس بر منحنی $z=f(x,y)$ واقع بر تقاطع رویه و صفحه $y=b$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ به صورت زیر است:

$z=g(x)$

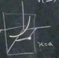
معادله خط مماس بر منحنی در $x=a$ $(y=b)$.

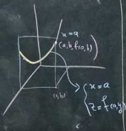
$$\begin{cases} \underset{f(a,b)}{z-z_0} = g'(x)\,(x-a) \\ y=b \end{cases}$$



همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$





پس $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در تقاطع صفحه $x=a$ و رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ است.

مثال مشتقات جزئی مرتبه اول تابع زیر را در نقطه $(4,5)$ محاسبه کنید.

$$f(x,y)=x^2+3xy+y-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,5) = 2x+3y\Big|_{(4,5)}$$

$$=2\times 4+3\times 5$$

توجه

اگر $z=f(x,y)$ یک تابع از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$(a,b)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

(مشابه این $\frac{\partial f}{\partial y}$ گفته برای تابع)

برای مثال قبل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x+1$$

$f(x,y)=x^2+3xy+y-1$

راه حل دوم

$$g(y)=f(4,y)=$$

$$16+12y+y-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,5)=g'(y)\Big|_{y=5}=12+1$$

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}(4,5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,5)=3x+1\Big|_{(4,5)}$$

$$=12+1$$

داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,5)=g'(x)\Big|_{x=4}$$

$$=2\times4+15$$

راه حل دوم

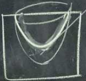
برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(4,5)$ تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

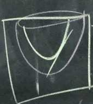
$$g(x)=f(x,5)$$

$$=x^2+15x+4$$

تمرین

صفحه‌ی $x=1$ سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادله‌ی خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(1,2,5)$ بنویسید.





$x=1$

مثال

$f(x,y) = y\sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$