به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

خرداد ماه ۹۸ — آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ — مدت: ۱۵۰ دقیقه

بارم هر سوال: ۱۵ نمره

---

۱. ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2+y^2+4x-4y$ را روی ناحیه $D=\{(x,y)| \quad x^2+y^2\leq 18\}$ بیابید.

---

۲. انتگرال مکرّر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dxdy$$

---

۳. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\int_D\frac{x-y}{x+y}dxdy$$

که در آن D ناحیه درون مستطیلی به رئوس $(2,2)$، $(1,1)$، $(0,2)$ و $(1,3)$ است.

---

۴. انتگرال زیر را محاسبه کنید،

$$\int\int\int_D z\ dxdydz$$

که در آن D ناحیه مشترک درون کُره‌ی $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ و خارج کُره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ است.

---

۵. حجم درون قسمتی از هذلولی‌گونِ یکپارچه‌ی $x^2+y^2-z^2=1$، محدود بین صفحات $z=0$ و $z=\sqrt{3}$ را محاسبه کنید.

---

۶. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ است که بالای صفحه $z=\sqrt{3}$ قرار دارد.

الف) مساحت رویه S را محاسبه کنید.

ب) مطلوب است محاسبه $\int\int_S F.n\ d\sigma$ که n قائم یکه بر S در جهت مثبت محور z است و $F(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

---

۷. مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_C(x+y)\ dx+xy\ dy$ که در آن خم بسته‌ی C متشکل از قسمتی از دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ و خط $y=0$ واقع در ربع اول صفحه است که در جهت مثبت طی می‌شود.

---

۸. فرض کنید D ناحیه‌ی محدودشده در خارج کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4z$ و داخل کره‌ی $x^2+y^2+z^2=16$ و داخل مخروطِ $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ باشد. حاصل انتگرالِ $\int\int_S F.n\ d\sigma$ را محاسبه کنید که در آن S سطح مرزی ناحیه‌ی D و n قائم یکه بر S رو به بیرون (در جهت مثبت) است و $F(x,y,z)=(2x+e^{yz})\hat{i}+(y+\cos(z^2))\hat{j}+z\hat{k}$ یک میدان برداری است.

موفق باشید

۱ـ ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲+۴x-۴y$ را روی ناحیه $D=\{(x,y):\ x^۲+y^۲\leq ۹\}$ بیابید. پاسخ: ابتدا نقاط بحرانی درون ناحیه D را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲x+۴=۰\ \ \Rightarrow x=-۲$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=۲y-۴=۰\ \ \Rightarrow y=۲$$

نقطه $(-۲,۲)$ درون ناحیه D تنها نقطه بحرانی است. حال نقاط اکسترمم روی مرز را پیدا می‌کنیم. راه اول: (روش لاگرانژ) اکسترمم f تحت شرط $g=x^۲+y^۲-۱۸=۰$ را پیدا می‌کنیم. (۵ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\ \ \Rightarrow ۲x+۴=\lambda ۲x\Rightarrow x=\frac{۲}{\lambda-۱}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\ \ \Rightarrow ۲y-۴=\lambda ۲y\Rightarrow y=\frac{-۲}{\lambda-۱}$$
$$x^۲+y^۲=۱۸$$

بنابراین (۳ نمره)

$$(\lambda-۱)^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \lambda=\frac{۵}{۳},\frac{۱}{۳}.$$

حال داریم

$$\lambda=\frac{۵}{۳}\Rightarrow x=۳,y=-۳,$$
$$\lambda=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=-۳,y=۳.$$

نقاط اکسترمم مطلق در جدول زیر پیدا می‌شود. (۵ نمره)

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-۲,۲)$	-۸	مینیمم مطلق
$(۳,-۳)$	۴۲	ماکزیمم مطلق
$(-۳,۳)$	-۶	

راه دوم: مرز را بصورت زیر پارامتری می‌کنیم: (۲ نمره)

$$x(t)=۳\sqrt{۲}\cos t,\ y(t)=۳\sqrt{۲}\sin t,\ \ ۰\leq t\leq ۲\pi$$

بنابراین اکسترمم تابع زیر را پیدا می‌کنیم: (۳ نمره)

$$g(t)=f(x(t),y(t))=۹+۱۲\sqrt{۲}\cos t-۱۲\sqrt{۲}\sin t.$$

$$g'(t)=-۱۲\sqrt{۲}(\sin t+\cos t)=۰\Rightarrow \tan t=-۱\Rightarrow t=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}.$$

(۲ نمره)

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-۲,۲)$	-۸	مینیمم مطلق
$t=۰,۲\pi\rightarrow(۳\sqrt{۲},۰)$	$۱۸+۱۲\sqrt{۲}$	
$t=\frac{۳\pi}{۴}\rightarrow(-۳,۳)$	-۶	
$t=\frac{۷\pi}{۴}\rightarrow(۳,-۳)$	۴۲	ماکزیمم مطلق

(۵ نمره)

۲ـ مطلوبست محاسبه انتگرال مکرر زیر

$$\int_۰^۱\int_{\sin^{-۱}y}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\sqrt{۱+\cos^۲ x}\,dxdy.$$

ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر است

$$\begin{cases}۰\leq y\leq ۱\\ \sin^{-۱}y\leq x\leq\frac{\pi}{۲}.\end{cases}$$

ناحیه را بصورت عمودی بیان می‌کنیم

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \sin x. \end{cases}$$

(۷ نمره)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx. \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $u = 1 + \cos^2 x$ داریم $du = -2\sin x \cos x\, dx$. لذا (۳ نمره)

$$I = \int_2^1 \frac{-1}{2}\sqrt{u}\, du = \frac{-1}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big]_2^1 = \frac{-1+2\sqrt{2}}{3}.$$

(۵ نمره)

---

۳. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\int_D \frac{x-y}{x+y} dxdy$$

که در آن D ناحیه درون مستطیلی به رئوس $(2,2)$، $(1,1)$، $(0,2)$ و $(1,3)$ است.

پاسخ:

معادله‌ی خط واصل نقاط $(1,1)$ به $(2,2)$ بصورت $y = x$ و معادله‌ی خط واصل نقاط $(0,2)$ به $(1,3)$ بصورت $y = x+2$ است. همچنین معادله‌ی خط واصل نقاط $(1,1)$ به $(0,2)$ بصورت $y = -x+2$ و معادله‌ی خط واصل نقاط $(1,3)$ به $(2,2)$ بصورت $y = -x+4$ است. بعبارتی درون مستطیل D ناحی‌های بین خطوط $x-y=-2$، $x-y=0$، $x+y=2$ و $x+y=4$ است.(۳ نمره)

با استفاده از تغییر متغیر و با قرار دادن $u = x-y$ و $v = x+y$ خواهیم داشت: (۲ نمره)

(۲ نمره) $x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(v-u) \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ همچنین در مورد مرز تصویر D با این تغییر مختصات در صفحه‌ی uv داریم:

(۲ نمره)

$$x+y=2,\ x+y=4 \Longrightarrow 2 \leq v \leq 4$$

و

$$x-y=-2,\ x-y=0 \Longrightarrow -2 \leq u \leq 0$$

در نتیجه داریم: (۶ نمره)

$$\int\int_D \frac{x-y}{x+y} dxdy = \int_2^4 \int_{-2}^0 \frac{u}{v}(\frac{1}{2})\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{u^2}{2}]_{-2}^0 \frac{1}{v} dv = -\ln v]_2^4 = -\ln 4 + \ln 2 = -2\ln 2 + \ln 2 = -\ln 2$$

---

۴. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int\int\int_D z\, dxdydz$$

که در آن D ناحیه مشترک درون کره $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ و خارج کره $x^2+y^2+z^2 = 4$ است. ابتدا معادلات کروی این دو دایره بترتیب عبارتست از: $\rho = 4\cos\varphi$ و $\rho = 2$.(۲ نمره)

صفحه‌ی خم برخورد این دو کره عبارتست از:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2 = 4 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow z^2 + (z-2)^2 = 0 \Longrightarrow z = 1$$

بنابراین اگر در معادله‌ی کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = 4$، $z = 1$ را قرار دهیم با استفاده از مختصات کروی داریم $4\sin^2\varphi = 3$ یا بطور معادل $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ که بنا به تغییرات φ در مختصات کروی زاویه‌ی $\varphi = \frac{\pi}{3}$ یا $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ را نتیجه می‌دهد. اما چون تقاطع در بالای صفحه‌ی xy رخ داده است، $\varphi = \frac{\pi}{3}$ قابل قبول است (این مطلب را می توان با جایگذاری $z = 1$ در $x^2+y^2+z^2 = 4$ نیز بدست آورد).(۴ نمره)

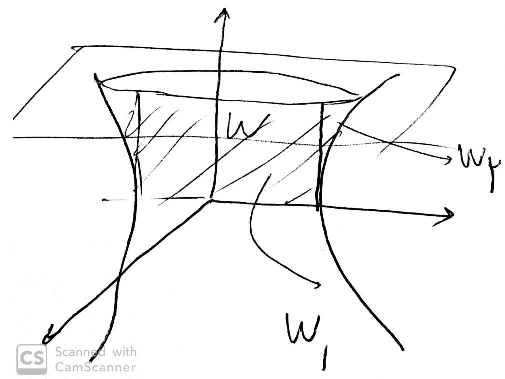
بنابراین ناحیه‌ی D در مختصات کروی به شکل

$$D = \{(\rho,\varphi,\theta) : 2 \leq \rho \leq 4\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

است.(۲ نمره)
بنابراین داریم:(۷ نمره)

$$\begin{aligned}\int\int\int_D z\,dxdydz &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۲^{۴\cos\varphi}\rho\cos\varphi(\rho^۲\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\rho^۴}{۴}\Big]_۲^{۴\cos\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(۶۴\cos^۵\varphi\sin\varphi-۴\cos\varphi\sin\varphi)\,d\varphi\,d\theta\\ &= \int_۰^{۲\pi}(\tfrac{-۶۴}{۶}\cos^۶\varphi+۲\cos^۲\varphi)\Big]_۰^{\frac{\pi}{۳}}\,d\theta\\ &= ۹\int_۰^{۲\pi}d\theta\\ &= ۱۸\pi\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵ـ



$$\text{حجم}=\iiint_W dv=\iiint_{W_۱}dv+۲\iiint_{W_۲}dv$$

۲ نمره.

$$\iiint_{W_۱}dv=\iint_{D_۱}(\int_۰^{\sqrt{۳}}dz)dxdy=\iint_{D_۱}\sqrt{۳}dxdy=\sqrt{۳}\iint_{D_۱}dxdy=\sqrt{۳}\pi$$

۵ نمره.

$$\iiint_{W_۲}dv=\iint_{D_۲}(\int_{\sqrt{x^۲+y^۲-۱}}^{\sqrt{۳}}dz)dxdy=\iint_{D_۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{x^۲+y^۲-۱})dxdy=$$

۳ نمره.

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۱^۲(\sqrt{۳}r-\sqrt{r^۲-۱}r)drd\theta=۲\pi\Big(\int_۱^۲\sqrt{۳}rdr-\int_۱^۲(r^۲-۱)^{\frac{۱}{۲}}rdr\Big)=$$

$$۲\pi\left((\sqrt{۳}\frac{r^۲}{۲})_۱^۲-(\frac{۱}{۲}\frac{(r^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}})_۱^۲\right)=۲\pi(۲\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳^{\frac{۳}{۲}}}{۳})=\pi(۴\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}\pi$$

۳ نمره.
حجم W برابر است با

$$(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳})\pi=۳\sqrt{۳}\pi$$

۱ نمره.
راه حل دوم. با استفاده از مختصات استوانه‌ای و انتگرال زیر نیز سوال به راحتی حل می‌شود:

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۳}}\int_۰^{\sqrt{z^۲+۱}}drdzd\theta.$$

پاسخ سوال ۶ـ

$$z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}=g(x,y),\quad D=\{(x,y):x^۲+y^۲\leq ۱\}$$

۲ نمره.
الف:

$$\text{مساحت}=\iint_S dS=\iint_D\Big(\sqrt{\frac{x^۲}{۴-x^۲-y^۲}+\frac{y^۲}{۴-x^۲-y^۲}+۱}\Big)dxdy$$

۲ نمره.

$$= \iint_D \sqrt{\frac{۴}{۴ - x^۲ - y^۲}} dxdy = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^۱ \frac{۲}{\sqrt{۴ - r^۲}} r dr d\theta$$

۲ نمره.

$$= ۲\pi \int_۰^۱ \frac{۲r}{\sqrt{۴ - r^۲}} dr = ۲\pi(-۲\sqrt{۴ - r^۲})\Big|_۰^۱ = ۲\pi(۴ - ۲\sqrt{۳})$$

۲ نمره.

ب:

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

۱ نمره.

$$\iint_S F \cdot n d\sigma = \iint_D (x, y, z) \cdot \Big(\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}, \frac{-y}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}, ۱\Big) dxdy$$

۳ نمره.

$$= \iint_D \frac{۴}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}} = ۲ \iint_D \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}} = ۴\pi(۴ - ۲\sqrt{۳})$$

با توجه به الف. ۳ نمره.

جواب سؤال ۷:

با استفاده از قضیه گرین داریم

$$I=\int_C \overbrace{(x+y)}^{P}\,dx+\overbrace{xy}^{Q}\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D (y-1)\,dx\,dy$$ (۳ نمره)

با استفاده از سیستم مختصات قطبی برای ناحیه D داریم

$$D=\{(r,\theta):\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\quad 0\le r\le 2\cos\theta\}$$ (۵ نمره)

در نتیجه:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}(r\sin\theta-1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\sin\theta-\frac{r^2}{2}\right)\Big]_0^{2\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2^3}{3}\cos^3\theta\sin\theta-\frac{2^2}{2}\cos^2\theta\right)d\theta$$ (۳ نمره)

$$=\frac{2^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos2\theta}{2}}d\theta$$

$$=-\frac{2^3}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{2^3}{3}\left(0-\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$$ (۴ نمره)

جواب سؤال ۸:

با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$I=\iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div} F\,dV=\iiint_D (P_x+Q_y+R_z)\,dV$$

$$=\iiint_D 4\,dx\,dy\,dz$$ (۴ نمره)

با استفاده از لیست مختصات کروی برای ناحیه D داریم

$$D=\{(\rho,\varphi,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},\ 4\cos\varphi\le\rho\le 4\}$$ (۶ نمره)

در نتیجه

$$I=4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{4\cos\varphi}^{4}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big]_{4\cos\varphi}^{4}\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$ (۳ نمره)

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4^3-4^3\cos^3\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}4^3\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^4\varphi}{4}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$=\frac{4^4\times 2\pi}{3}\left(\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right)$$

$$=\frac{4^4\times 2\pi}{3}\left(\frac{3^2}{4^3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)=32\pi\left(75-\frac{4^4}{2\sqrt{3}}\right)$$ (۳ نمره)