کلید تصحیح سوالهای ۱ و ۲ میانترم.

لطفا پیش از مراجعه برای اعتراض حتما این کلید را مطالعه بفرمائید.

جواب سوال ۱. یکی از شروط لازم برای این که تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ حد داشته باشد این است که روی تمام مسیرهای $f(x, y) = k$ **که از مبدأ می‌گذرند** حدهای یکسانی داشته باشد. روی مسیر $y = x$ (۲ نمره) داریم

$$f(x,x) = \frac{x^۹}{x^۳ + x^{۱۲}} = \frac{x^۶}{۱ + x^۹} \quad x \neq ۰$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰} f(x,x) = ۰$$

۳ نمره.

روی مسیر $x^۳ = y^{۱۲}$ یا ($x = y^۴$)داریم

$$\lim_{y\to ۰} f(y^۴, y) = \lim_{y\to ۰} \frac{y^{۱۲}}{y^{۱۲} + y^{۱۲}} = \frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که هر دوی این مسیر از مبدأ می‌گذرد. ۳ نمره.

از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو مسیر متفاوت رسیده‌ایم، تابع مورد نظر در $(۰, ۰)$ حد ندارد. ۲ نمره.

جواب سوال ۲. الف) در $(x, y) \neq (۰, ۰)$ (از آنجا که $\frac{x^۲}{x^۲+y^۲} \leqslant ۱$) داریم:

$$۰ \leqslant |f(x,y) - f(۰,۰)| = \left|\frac{x^۲ \tan y}{x^۲ + y^۲}\right| \leqslant |\tan y|$$

بنابراین

$$۰ \leqslant \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} |f(x,y) - f(۰,۰)| \leqslant \lim_{y\to ۰} |\tan y| = ۰$$

پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = f(۰,۰)$.

۵ نمره.

توجه: اکثر دانشجویان به اشتباه نوشته‌اند که $|\tan(y)| \leq |y|$. در واقع عکس این گفته برقرار است. به همه‌ی این دانشجویان (در صورتی که بقیه‌ی بحث را درست نوشته باشند، ۲٫۵ نمره تعلق گرفته است).

ب)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(h,۰) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰,h) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

۵ نمره.

توجه. تعداد زیادی از دانشجویان مقادیر مشتقات جزئی را با استفاده از ضابطه (و نه تعریف)محاسبه کرده‌اند که به آنها هیچ

نمره‌ای تعلق نگرفته است؛ هر چند به عدد صفر اشاره کرده باشند.

ج)

$$D_{\vec{u}=(a,b)}f(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰+ah, ۰+bh) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{a^۲h^۲\tan(bh)}{h(a^۲h^۲+b^۲h^۲)} = \lim_{h\to ۰} \frac{h^۲a^۲\tan(bh)}{h^۲(a^۲+b^۲)h} =$$

$$\lim_{h\to ۰}\left(\frac{a^۲}{a^۲+b^۲}\right)\underbrace{\frac{\tan(bh)}{h}}_{\text{همگرا به } b} = \frac{ba^۲}{a^۲+b^۲} = \frac{ba^۲}{۱}$$

(بردار مورد نظر یکه است $a^۲+b^۲=۱$). ۵ نمره.

د) یک شرط**لازم** برای مشتق‌پذیر بودن تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ این است که رابطه‌ی زیر برای مشتق سوئی آن برقرار باشد:

$$D_{\vec{u}=(a,b)}f(۰,۰) = f_x(۰,۰)a + f_y(۰,۰)b$$

بنا به موارد ب و ج داریم:

$$(a,b)\neq(۰,۰) \Rightarrow ba^۲ \neq ۰\times a + ۰\times b$$

پس تابع یاد شده در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست. ۵ نمره.

توجه: شرط بالا برای مشتق‌پذیری کافی نیست (لازم است). اگر در قسمتهای قبلی به علت عدم محاسبه‌ی صحیح، به این نتیجه رسیده باشید که مشتق سوئی وجود ندارد و از آن عدم مشتق‌پذیری را نتیجه گرفته باشید تنها ۱ نمره تعلق گرفته است.