جواب ۳)

قرار دهید

$$u=\frac{y-x}{xy}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

۳ نمره

$$v=\frac{z-x}{xz}=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}$$

$$\Longrightarrow \quad w=f(u,v)$$

اکنون با استفاده از قاعده زنجیره‌ای توابع چند متغیره داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

۳ نمره

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(-1/x^2\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(-1/x^2\right)=$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

۳ نمره

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(1/y^2\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(0)=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$$

۳ نمره

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(0)+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(1/z^2\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{z^2}$$

در نتیجه

۳ نمره

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x}+y^2\frac{\partial w}{\partial y}+x^2\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{x^2}\right)+y^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y^2}\right)+z^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{z^2}\right)$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=0$$

سوال ۴ (الف)

بردار نرمال چنین صفحه‌ای به صورت

(1) $\vec{N}_1 = \vec{\nabla} F(2,1,2)$

خواهد بود که در آن

$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1$

اما

(2) $\vec{\nabla} F(x,y,z) = -2xi - 2yj + 2zk$

$\vec{N}_1 = -4i - 2j + 4k$

اما معادله کلی صفحه با بردار نرمال $\vec{N} = ai + bj + ck$ که از نقطه $P = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد به صورت

(1) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

است یعنی در اینجا

(1) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

$\Longrightarrow -4(x-2) - 2(y-1) + 4(z-2) = 0$

$\Longrightarrow -4x + \cancel{8} - 2y + 2 + 4z - \cancel{8} = 0$

(1) $\Longrightarrow 4x + 2y - 4z = 2$

$\longrightarrow \boxed{2x + y - 2z = 1}$

حل (ب) در صفحه بعد

جواب

سؤال ۴ (ب)

قرار دهید

$$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

بردار نرمال هر صفحه مماس بر رویه در نقطه‌ای واقع بر رویه برابر است با

۱ $$\vec{N} = \vec{\nabla} F(x,y,z) = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$= -2x i - 2y j + 2z k$$

۲ بنا بر فرض مسئله باید

$$\vec{N} \parallel \vec{N_1}$$

که در آن $\vec{N_1}$ بردار نرمال بر صفحه مماس در قسمت (الف) است. اما

$$\vec{N_1} = -4i - 2j + 4k$$

۱ $$\vec{N} = t\vec{N_1}$$

$$\Rightarrow -2x i - 2y j + 2z k = -4t i - 2t j + 4t k$$

۲ $$\Longrightarrow Q: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

چون این نقطه می‌خواهد واقع بر رویه باشد باید

۲ $$\cancel{(2t)^2} - \cancel{(2t)^2} - t^2 + 1 = 0$$

$$t^2 = 1 \longrightarrow t = \pm 1$$

با $t=1$ همان نقطه داده شده در قسمت (الف) بدست می‌آید یعنی $P = (2,1,2)$

با $t=-1$ نقطه‌ای دیگر بدست می‌آید یعنی

۱ $$Q = (-2, -1, -2)$$