ریاضی عمومی ۲

محسن خانی

۶ اسفند ۱۳۹۷

چکیده

جزوه‌ی پیش رو در طی تدریسِ درس ریاضی عمومی ۲ در نیمسال دوم تحصیلی ۹۷-۹۶ در دانشگاه صنعتیِ اصفهان حاصل شده است. اکثر مثالها، از کتاب حسابِ جیمز استوارت برگرفته شده‌اند. در نگارش جزوه، هر جلسه را سروقت به اتمام رساندن و به روی تارنما گذاشتن برایم بیش از رعایت زیبائی ادبی، و حتی بی‌خطائی اهمیت داشته است. بنابراین چه بسا جملاتی در جزوه یافت شوند که به بهترین ادبیات نوشته نشده‌اند و نیاز به ویرایش داشته باشند، و چه بسا اشتباهاتی تایپی در آن موجود باشد. امیدوارم در سالهای پیش رو، با هر بار تدریس آن، بهبودش بخشم و مثالها و تمرینهای بهتر بر آن بیفزایم.

به عنوان یک مدرس، حداقلِ استانداردی که برای خود در نظر گرفته‌ام این بوده است که آنچه را که تدریس می‌کنم به صورت مُدوّن در اختیار دانشجویانم بگذارم، که دانشجو سرِ کلاسم فقط درس را گوش کند و به خود زحمت نوشتن ندهد و نگرانی عقب ماندن و پریشان نوشتن و دنبال جزوه دویدن نداشته باشد. فهمیده‌ام که میان آنچه استاد پای تخته می‌نویسد و آنچه دانشجو در دفترش ثبت می‌کند گاهی زمین تا آسمان فرق است. همچنین دیده‌ام که کسانی هستند که نمی‌توانند به سرعت بنویسند و جزوه‌نویسی برایشان دشوار است. شاید اگر در زمان دانشجوئی خودم استادی چنین زحمتی به خودش داده بود، او را ستایش می‌کردم. اما افسوس که همتِ گماشته شده بر این، گاهی نومید و دلسردم کرده است: آنگاه که دانشجوئی پس از گذشت نیمی از ترم، از موجودیت تارنمای درس و جزوه‌ی آنلاین بی‌خبر است. نیز آنگاه که شسته‌ورُفته بودن جزوه موجب این شود که دانشجو به خود زحمت کلاس آمدن و «استاد دیدن» ندهد و گمانش این باشد که همه‌ی حاصلِ دانشگاه رفتن، تحصیلِ کاغذپاره‌های جزوه‌ی این و آن است و آن «پیچشهای مو» را هیچگاه درنیابد.

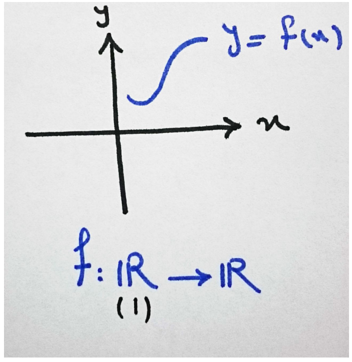
با این همه، هر مدرس همیشه دل به عده‌ای معدود خوش می‌کند که کلاس او را دوست می‌دارند و با جدیت دنبال می‌کنند. امیدوارم که آن معدود، حداکثر بهره را از این جزوه برده باشند و کاستی‌هایش را بر من ببخشایند.

سرآخر، این جزوه را با نهایت احترام به خانم «دُرسا پیری» تقدیم می‌کنم که زحمت تایپش را با علاقه و پشتکار به عهده گرفتند.

فهرست مطالب

۱ جلسه‌ی اول

در درس ریاضی ۱ با **حساب دیفرانسیل و انتگرال** توابع تک متغیره آشنا شدیم. یک تابعِ تک‌متغیره‌ی $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را می‌توان به دو طریق **هندسی** و **جبری** مطالعه کرد.



مطالعه‌ی هندسی این تابع یعنی رسم نمودار آن. مطالعه‌ی جبری تابع یعنی محاسبه‌ی مشتق آن، یافتن نقاط بحرانی و بررسی علامت مشتق. در ریاضی ۱ دیدیم که میان ویژگی‌های مشتق تابع و شکل هندسی آن رابطه وجود دارد. یعنی می‌توان شکل تابع را تنها با مطالعه‌ی جبری مشتقات آن حدس زد.

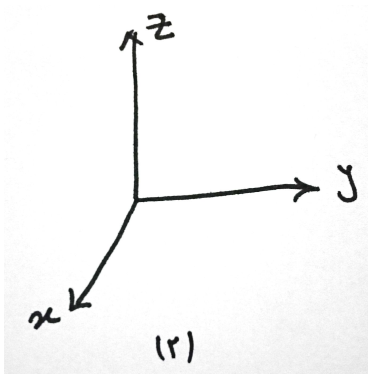
در درس ریاضی ۲ به حساب دیفرانسیل و انتگرال **توابع چندمتغیره** می‌پردازیم. هدف ما از این درس گذار از فضای دو بُعدیِ $\mathbf{R}^2$ به فضاهای با ابعاد بالاتر است، مانند $\mathbf{R}^n$ برای $n>2$. منظورمان از توابع چندمتغیره، توابعی است مانند

$$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m \quad n,m>0$$

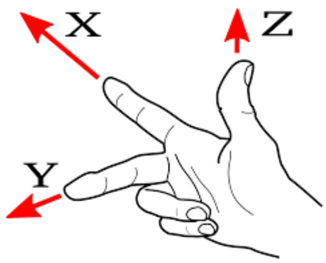
$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(y_1,\dots,y_m)$$

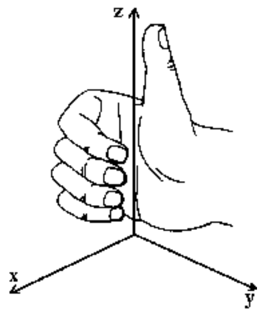
از میان این توابع، به طور خاص به توابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ و $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ علاقه‌مند خواهیم بود؛ زیرا این توابع را می‌توان در فضای سه‌بعدی تجسم کرد. فضای سه‌بعدی برای مطالعه‌ی فیزیکی حرکت بسیاری از اجسام در فضا، مناسب است.

فضای سه بُعدی $\mathbf{R}^3$ توسط سه محورِ x، y و z ساخته شده است.



برای تعیین ترتیب این محورها از قاعده‌ی دست راست استفاده می‌کنیم:

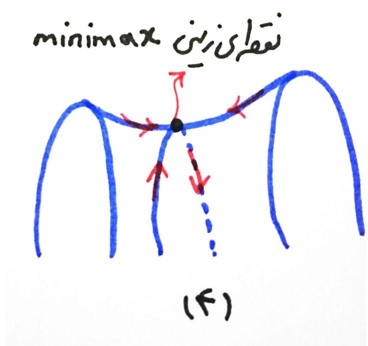




در این درس، نخست با نحوه‌ی رسم برخی توابع در $\mathbf{R}^3$ آشنا خواهیم شد و سپس مفهوم مشتق‌پذیری را به توابع $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ تعمیم خواهیم داد.

سوال ۱. فرض کنید $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ یک تابع باشد و $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ نقطه‌ای دلخواه باشد. پیشنهاد شما برای تعریف مشتق این تابع در نقطه‌ی یادشده چیست؟

در درس ریاضی ۱ دیدیم که توابع دیفرانسیل‌پذیرِ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ، توابعی هستند که رفتار آنها در نزدیکی نقاط را می‌توان با استفاده از رفتار خطوط مماس تخمین زد. در ریاضی ۲ خواهیم دید که در واقع مطالعه‌ی مشتق یک تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ یعنی تخمین زدن این توابع توسط صفحات مماس و مطالعه‌ی تغییرات صفحات مماس. در این درس نیز با استفاده از مطالعه‌ی مشتق، شکل هندسی یک تابع را تخمین خواهیم زد. در اینجا علاوه بر مینی‌موم و ماکزیمم، نقطه‌ی زینی هم خواهیم داشت:



رفع ابهام ۲. تجسم هندسیِ توابعِ $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به صورت **رویه‌ها** است. یک رویه را می‌توانید به صورت یک پارچه تصور کنید که می‌تواند چین و چروک هم داشته باشد. اما توابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ به صورت **منحنی‌های مسطح** هستند. منحنی‌های مسطح حالت خاصی از **منحنی‌های فضائی** هستند (و منحنی‌های فضائی توابعی مانند $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ هستند). یک منحنی فضائی را می‌توانید یک نخ تصور کنید که در فضا به شکلی درآمده است. در رسم منحنی‌های فضائی، **فقط بُرد تابع را رسم می‌کنیم.** در زیر، یک رویه و یک منحنی فضائی برای مثال رسم کرده‌ایم. شکل اول، توسط تابع زیر تولید شده است:

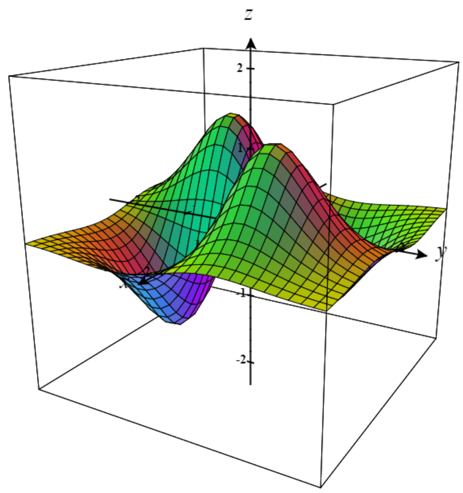
$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$$

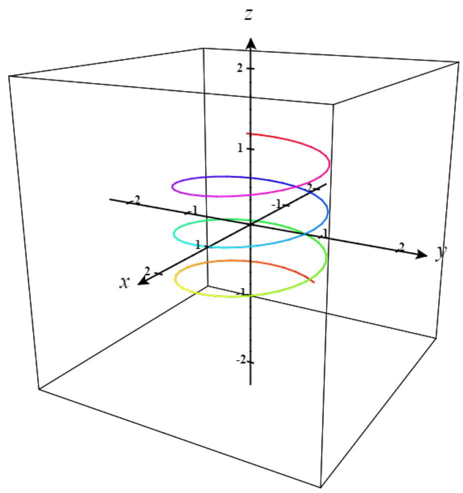
$$f(x,y)=\frac{7xy}{e^{x^2+y^2}}$$

شکل دوم توسط تابع زیر تولید شده است:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), ۰/۱t)$$





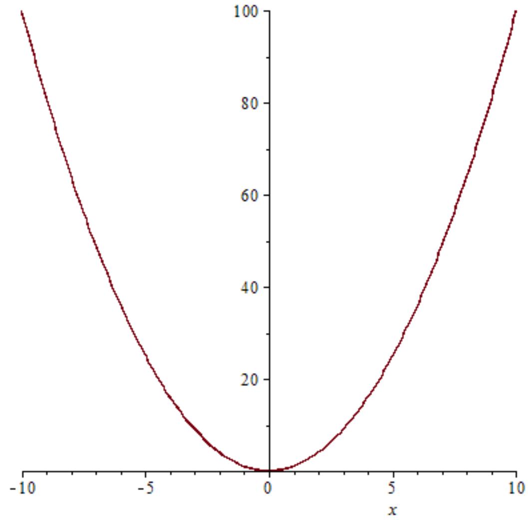
برای آشنائی بیشتر با فضای سه‌بعدی، نخست با نحوه‌ی رسم فضای هندسی برخی معادلات آشنا می‌شویم:

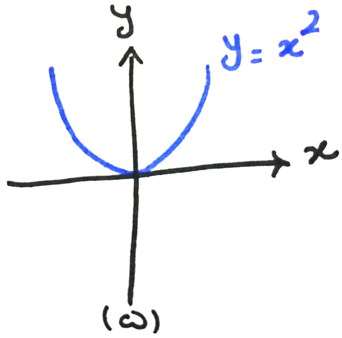
۱.۱ رسم استوانه‌ها

توجه کنید که در این بخش لزوماً به رسم **تابع‌ها** نخواهیم پرداخت. یعنی معادلاتی که آنها را رسم می‌کنیم، ممکن است لزوماً تابع نباشند.

مثال ۳. در **فضای دو بعدی** $\mathbf{R}^۲$ مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $y = x^۲$ را رسم کنید؛ یعنی مجموعه‌ی زیر را در $\mathbf{R}^۲$ بکشید:

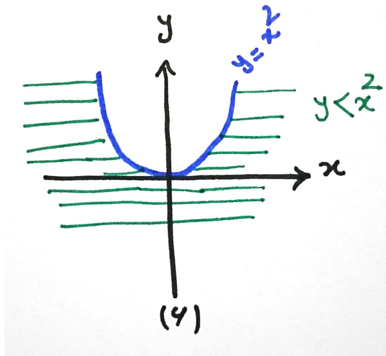
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ | y = x^۲\}$$



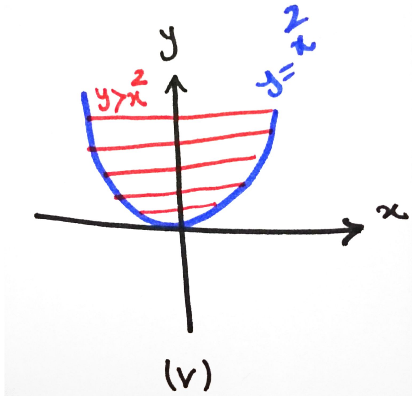


مثال ۴. در $\mathbf{R}^2$ مجموعه‌های زیر را رسم کنید:

$$\{(x,y)|y<x^2\}$$



$$\{(x,y)|y>x^2\}$$

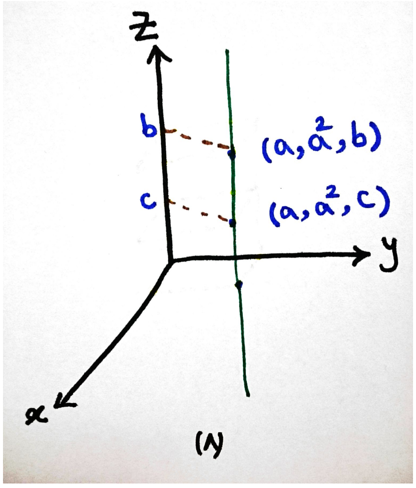


مثال ۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $y=x^2$ را در فضای **سه بُعدی** رسم کنید.

پاسخ. می‌خواهیم مجموعه‌ی نقاط زیر را در $\mathbf{R}^3$ رسم کنیم:

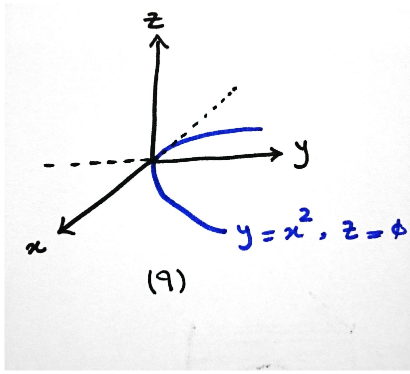
$$\{(x,y,z)|y=x^2\}$$

مشاهده ۶. اگر نقطه‌ی $(a, a^۲, b)$ روی شکل مورد نظر واقع باشد، آنگاه هر نقطه‌ی دیگرِ $(a, a^۲, c)$ نیز روی همان شکل خواهد بود. به بیان دیگر اگر نقطه‌ی p روی شکل مورد نظر ما واقع شود، آنگاه هر خطی که از p بگذرد و با محور z موازی باشد نیز روی شکل واقع است.



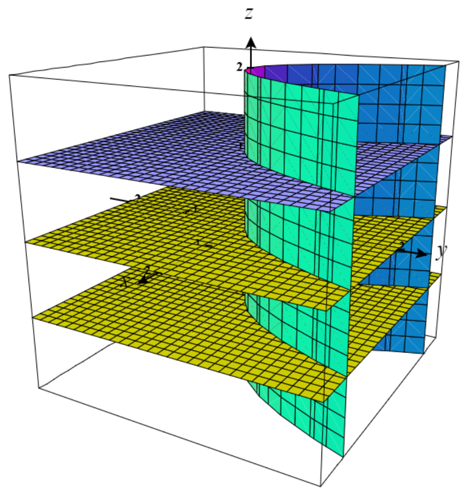
مشاهده ۷. تصویر شکل مورد نظر در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$\{(x, y, ۰) | y = x^۲\}$$

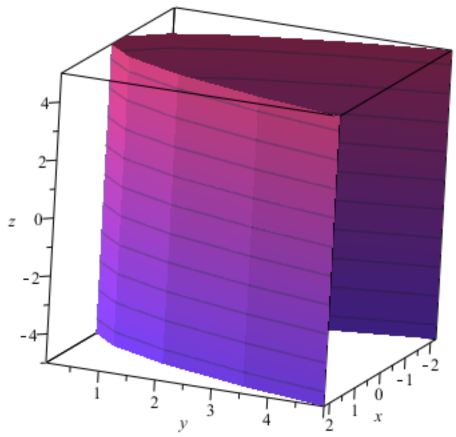


به بیان بهتر اشتراک شکل مورد نظر ما صفحه‌ی $z = ۰$ به صورت بالاست.

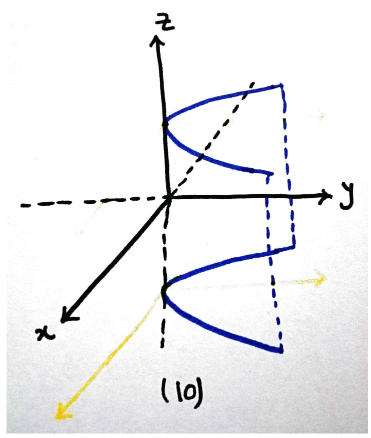
مشاهده ۸. اشتراک شکل مورد نظر ما با صفحات $z = ۰, z = \pm ۱$ به صورت زیر است:



در واقع در هر ارتفاعی یک بار منحنیِ $y = x^۲$ ایجاد شده است:

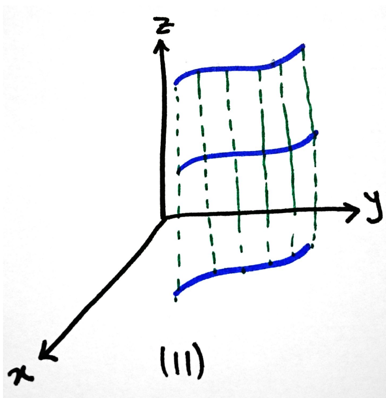


شکل بالا مثالی از یک **استوانه** است.

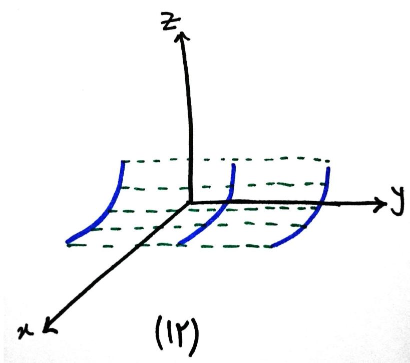


تعریف ۹. منظور از **استوانه** مجموعه‌ی همه‌ی خطوط موازی‌ای است که از یک منحنی دلخواه می‌گذرند.

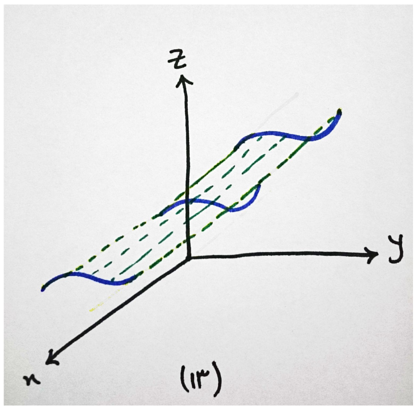
معادله‌ی $f(x, y) = ۰$ یک استوانه موازی محور zها به دست می‌دهد.



به منحنیِ $f(x,y)=0$ منحنیِ مولّد استوانه گفته می‌شود. به طور مشابه معادله‌ی $f(x,z)=0$ یک استوانه موازی محور y بدست می‌هد.

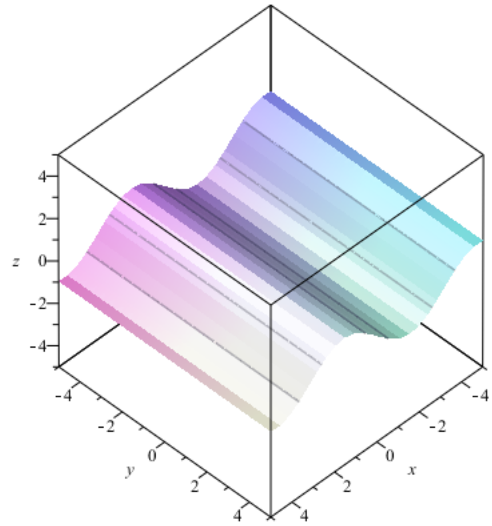


همچنین معادله‌ی $f(y,z)=0$ یک استوانه موازی محور x بدست می‌دهد.



□

مثال ۱۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $z=\sin x$ را رسم کنید.



z
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
y
2
4
4
2
0
x
-2
-4

۲ جلسه‌ی دوم

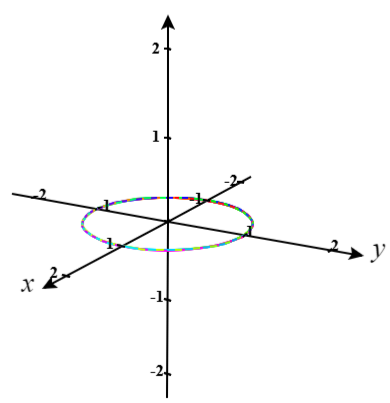
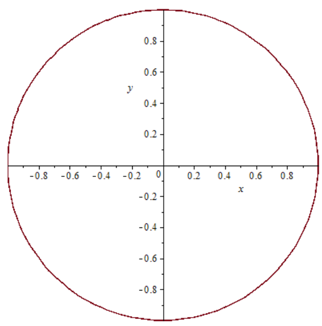
در جلسه‌ی قبل درباره‌ی استوانه‌ها، به عنوان مجموعه‌ای از خطوط موازی که از یک منحنی مشخص می‌گذرند، صحبت کردیم. بحث را با رسم چند استوانه پی می‌گیریم.

مثال ۱۱. استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ را رسم کنید.

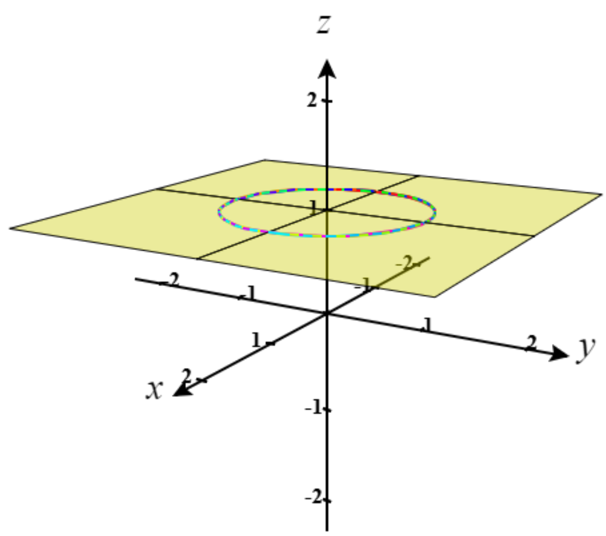
پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است.

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^{۳} | x^{۲} + y^{۲} = ۱\}$$

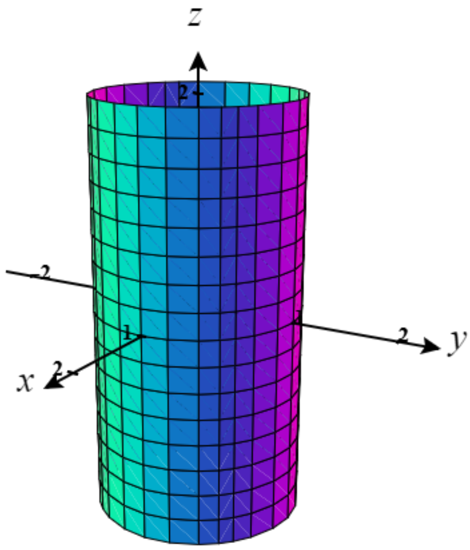
تصویر شکل مورد نظر روی صفحه‌ی $z = ۰$ به صورت زیر است.

به طور مشابه در هر صفحه‌ی $z = k$ نیز یک دایره به معادله‌ی $z = k, x^{۲} + y^{۲} = ۱$ ایجاد می‌شود:



بنابراین شکل مورد نظر ما یک استوانه به صورت زیر است:

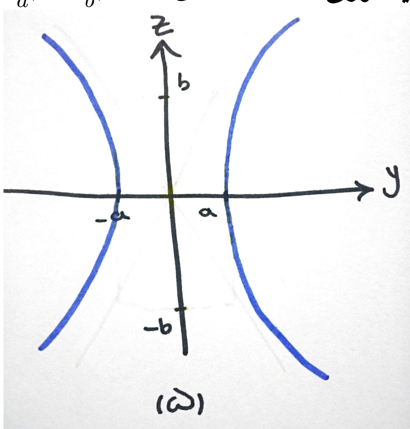


□

مثال ۱۲. استوانه‌ی $y^۲ - z^۲ = ۱$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که از آنجا که x در معادله‌ی بالا ظاهر نشده است، شکل مورد نظر استوانه‌ای خواهد بود موازی محور x.
پیش از آن که مثال بالا را پاسخ دهیم، نیازمند یادآوری چند مطلب از دوره‌ی دبیرستان هستیم:

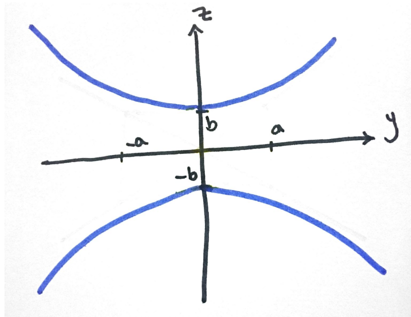
یادآوری ۱۳. معادله‌ی $\frac{y^۲}{a^۲} - \frac{z^۲}{b^۲} = ۱$ در صفحه‌ی yz یک هذلولی به دست می‌دهد.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی

$$\frac{z^۲}{b^۲} - \frac{y^۲}{a^۲} = ۱$$

به صورت زیر است:

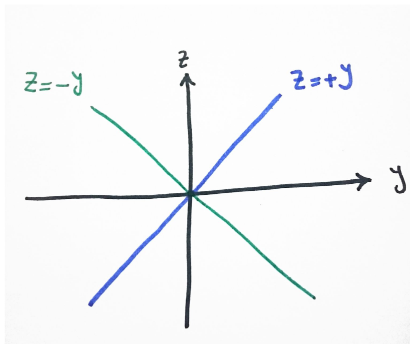


(۶)

سوال ۱۴ (سوال یکی از دانشجویان). نقاط صادق در معادله‌ی $y^2 - z^2 = 0$ چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

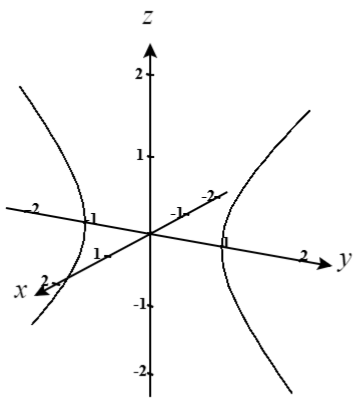
پاسخ:

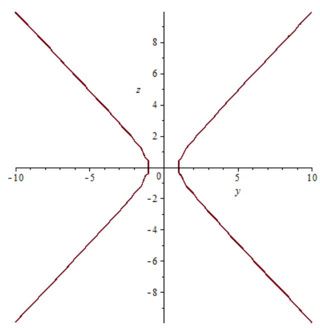
$$y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y-z)(y+z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -z \end{cases}$$



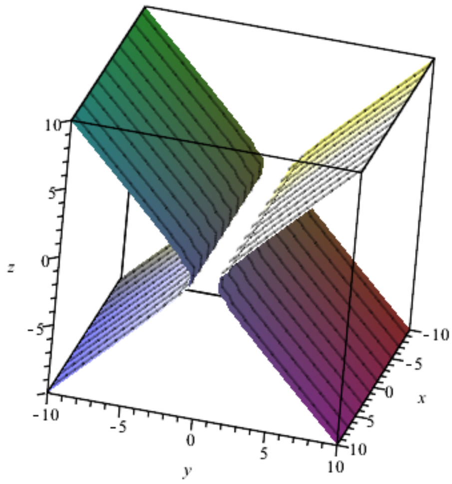
(۷)

حال به حل مثال بالا می‌پردازیم. در صفحه‌ی $x = 0$ شکل زیر ایجاد می‌شود که از معادله‌ی $x = 0, y^2 - z^2 = 1$ به دست آمده است.





در هر صفحه‌ی $x = k$ نیز همان شکل بالا ایجاد می‌شود و از این رو معادله‌ی ذکر شده در مثال، منجر به استوانه‌ی زیر می‌شود:



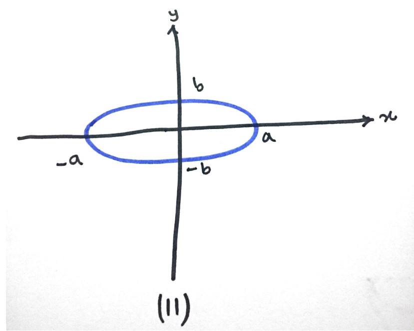
□

مثال ۱۵. استوانه‌ی $x^۲ + ۴z^۲ = ۴$ را رسم کنید.

پاسخ. نخست روش رسم یک بیضی را یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۱۶. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را در فضای دو بعدی رسم کنید:

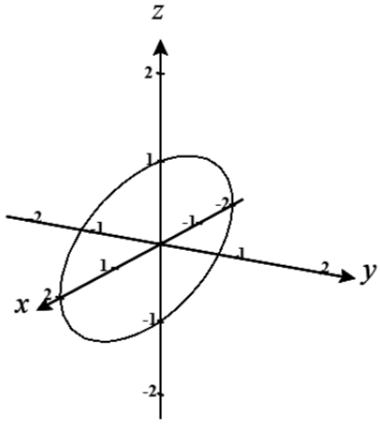
$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱.$$



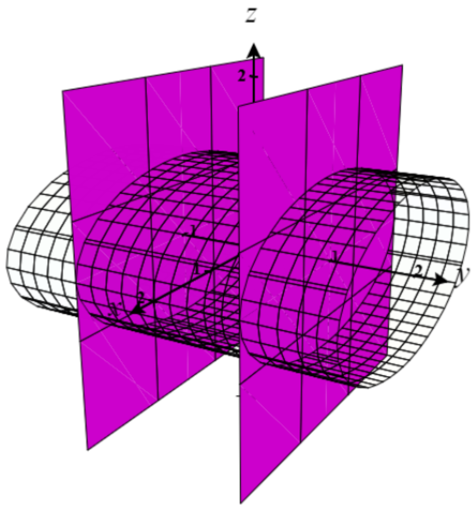
حال برای پاسخ به مثال ۱۵ نخست طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

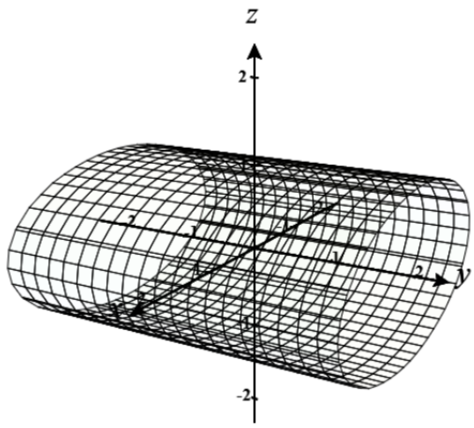
$$\frac{x^۲}{۴} + z^۲ = ۱$$

در صفحه‌ی $y = ۰$ شکل ایجاده شده به صورت زیر است:



مشابه مثالهای قبلی، استوانه‌ی مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود.





□

توجه ۱۷. تا کنون با نحوه‌ی رسم استوانه‌ها آشنا شده‌ایم. رسم رویه‌های سه بُعدی در حالت کلی آسان نیست. در زیر چند رویه را برای نمونه رسم کرده‌ایم که آنها را در کلاس درس، با استفاده از نرم‌افزار میپل خواهیم کشید.

۱. معادله‌ی $z = xy^2 - x^3$ که به «زین میمون» معروف است.

۲. معادله‌ی $z = xy^3 - yx^3$ که به «زین سگ» معروف است.

۳. معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ که به «زین اسب» معروف است.

۴. معادله‌ی $x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$

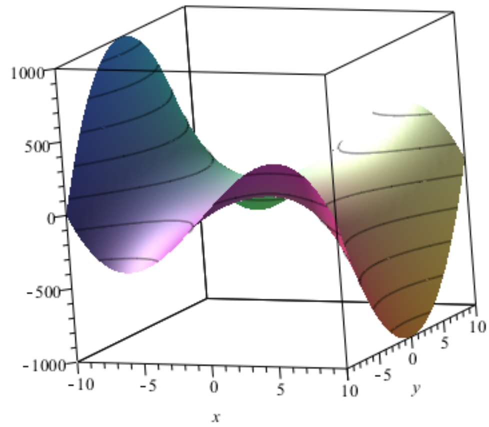
۵. معادله‌ی $z = \sin(xy)$.

۶. معادله‌ی $z = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$،

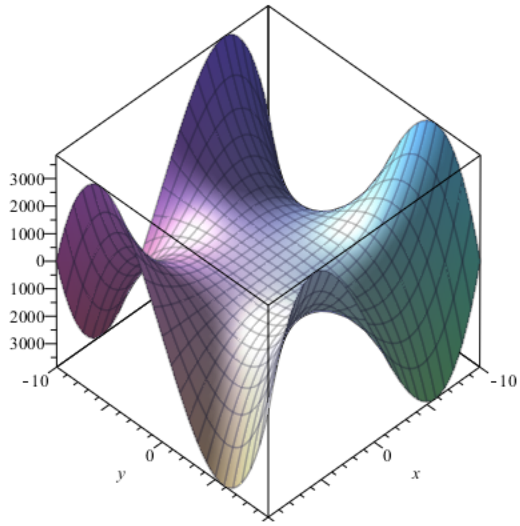
۷. معادله‌ی $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$،

۸. معادله‌ی $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$، از قضا خواهیم دید که رسم این معادله چندان دشوار نیست (دوران).

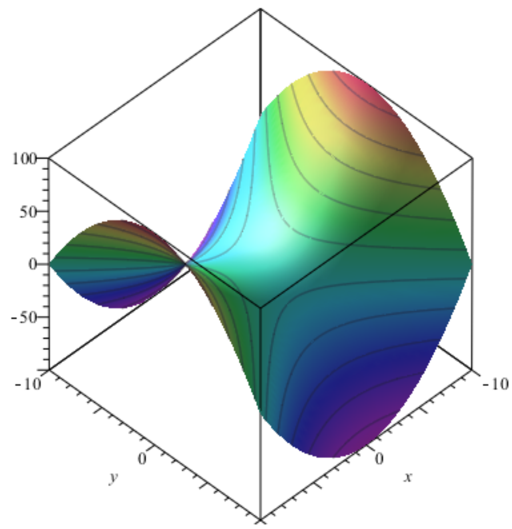
معادله‌ی ۱:



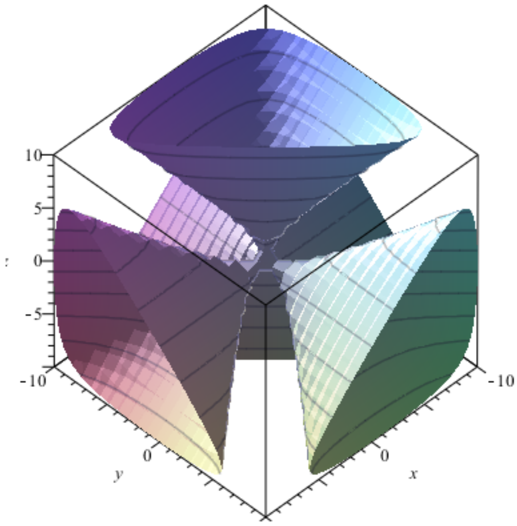
معادله‌ی ۲:



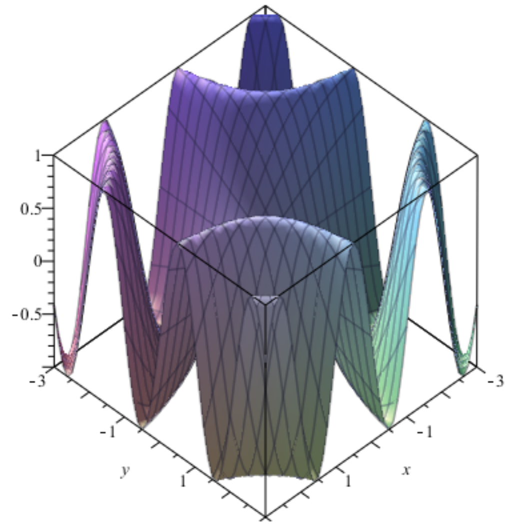
معادله‌ی ۳:



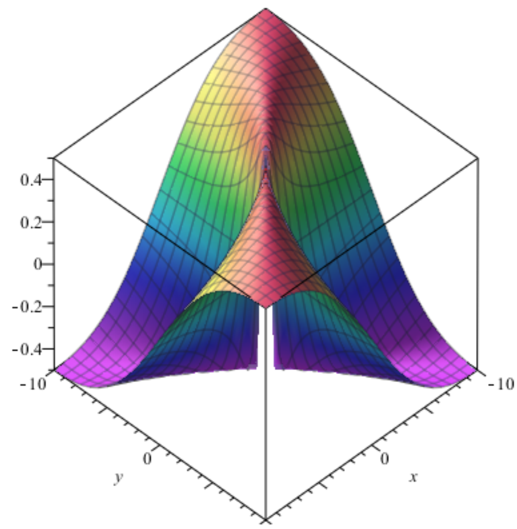
معادله‌ی ۴:



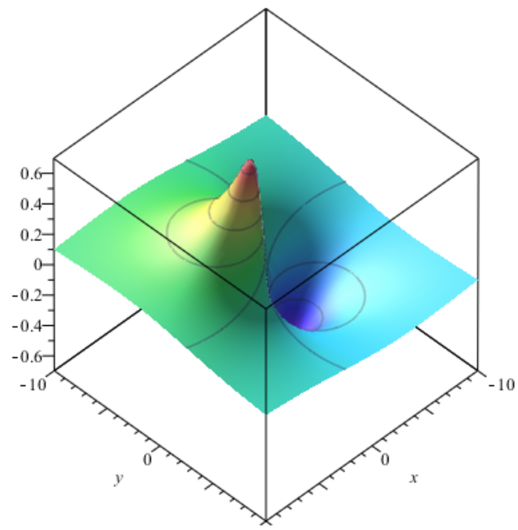
معادله‌ی ۵



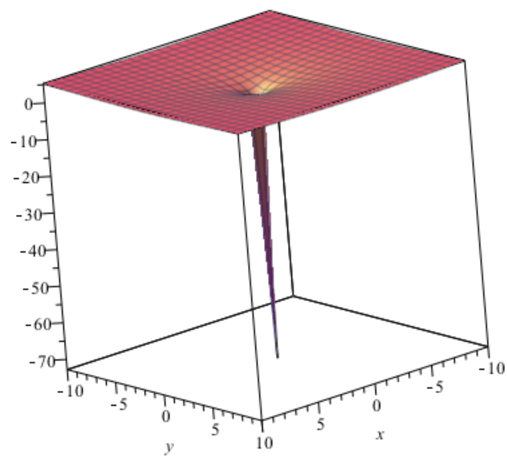
معادله‌ی ۶



معادله‌ی ۷:



معادله‌ی ۸:



در بخش آینده خواهیم کوشید تا مکان هندسیِ برخی معادلات ضمنی درجه‌ی دوم را رسم کنیم. توجه کنید که از کلمه‌ی ضمنی برای این استفاده کرده‌ایم که در معادلات زیر مقدار z را بر حسب دو متغیر x, y به طور مستقیم نداریم. در واقع آنچه رسم می‌کنیم لزوماً یک تابع نیست.

۱.۲ رسم رویه‌های درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی دوم، رویه‌ای است که با معادله‌ای به صورت زیر ایجاد می‌شود:

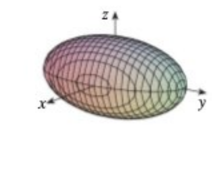
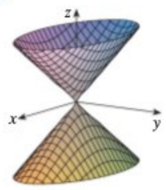
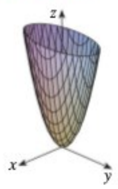
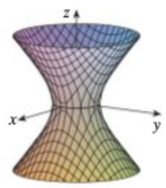
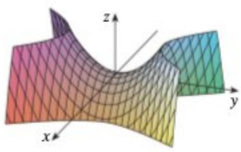
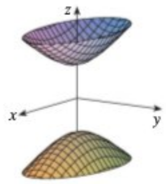
$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = ۰$$

توجه ۱۸. جای حروف بزرگ انگلیسی در بالا عدد قرار می‌گیرد.

توجه ۱۹. عبارتی شامل xyz در بالا نداریم (و به همین علت، معادله را درجه‌ی دوم نامیده‌ایم).

توجه ۲۰. با استفاده از تبدیل‌های خطی دوران و انتقال می‌توان ضرایب xz، yz و xy را از بین برد.

توجه ۲۱. شکلی که از معادله‌ی بالا حاصل می‌شود به یکی از صورت‌های زیر است:

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$.
Elliptic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

در زیر معادلات بالا را یکی‌یکی تحلیل می‌کنیم.

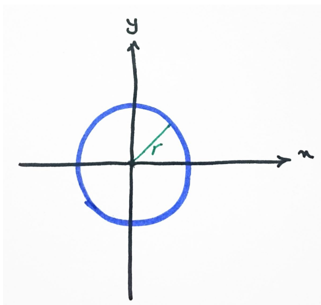
۲.۲ بیضی‌وار

یادآوری ۲۲. منظور از یک دایره در صفحه‌ی xy مجموعه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است.

$$\{(x,y)|\sqrt{x^۲+y^۲}=r\}$$

پس معادله‌ی یک دایره در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$x^۲+y^۲=r^۲$$



(۱۵)

منظور از کُره مجموعه نقاطی است مانند $(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳$ که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است. (ثابت کنید که) فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y,z) تا مبدأ برابر است با

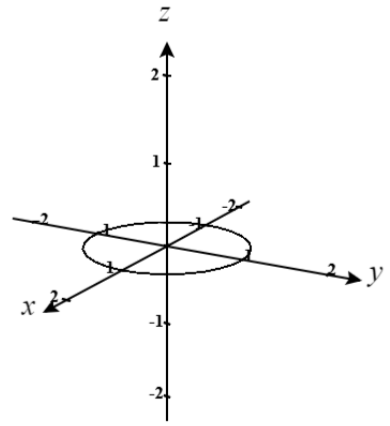
$$\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}.$$

پس معادله‌ی کلی یک کُره به مرکزِ مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = r^۲$$

مثال ۲۳. رویه‌ی حاصل از معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ را رسم کنید.

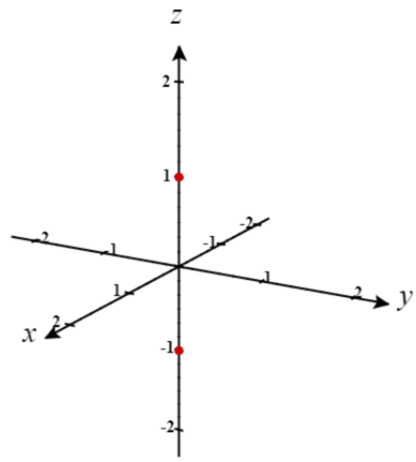
پاسخ. در صفحه‌ی $z = ۰$ شکل یک دایره با معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ ایجاد می‌شود.



معادله‌ی دایره‌ی بالا عبارت است از $x^۲ + y^۲ = ۱$, $z = ۰$.

در صفحه‌های $z = \pm ۱$ تنها یک نقطه ایجاد می‌شود:

$$z = \pm ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x, y) = (۰, ۰)$$

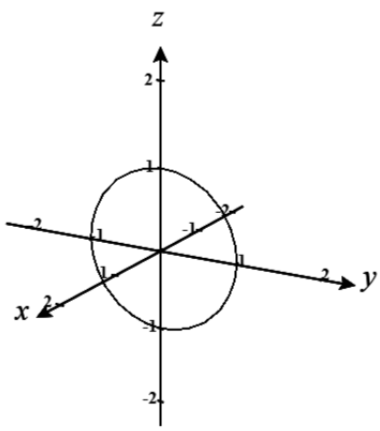


در صفحه‌های $z = k > ۱$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = -۳ \Rightarrow \text{هیچ نقطه‌ای نداریم.}$$

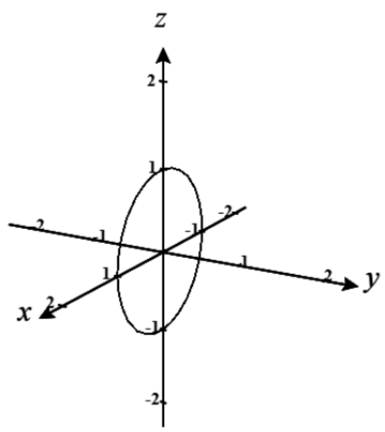
در صفحه‌ی $x = ۰$ نیز یک دایره ایجاد می‌شود:

$$x = ۰ \Rightarrow y^۲ + z^۲ = ۱$$

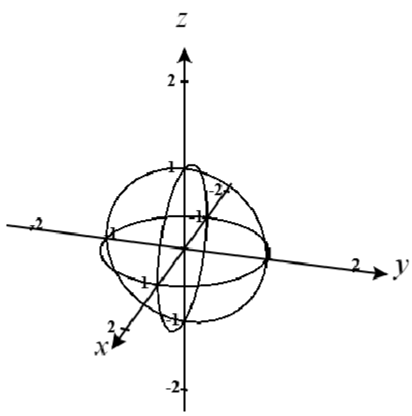


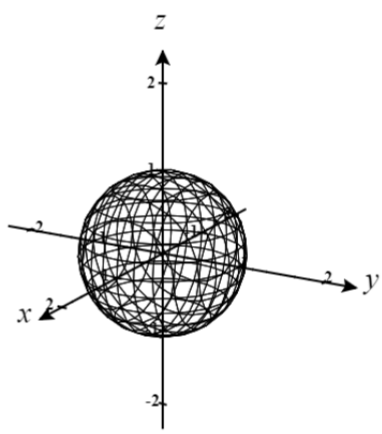
به همین ترتیب در صفحه‌ی $y = ۰$ نیز دایره‌ی زیر ایجاد می‌شود.

$$y = ۰ \Rightarrow x^۲ + z^۲ = ۱$$



شکل کلی نیز به صورت زیر خواهد بود:





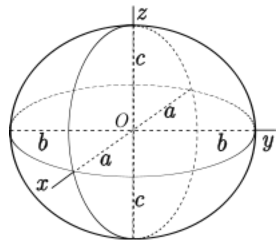
□

مثال ۲۴. شکل صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

پاسخ.

$$
\begin{aligned}
z = ۰ &\Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \\
z = c &\Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۰ \\
x = ۰ &\Rightarrow \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ \\
y = ۰ &\Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱
\end{aligned}
$$



شکل بالا **بیضی‌وار** نامیده می‌شود.[۱] □

توجه ۲۵. اگر $a = b = c$ شکل حاصل یک کُره خواهد بود.

۳.۲ سهمی‌وار بیضوی

مثال ۲۶. شکل حاصل از معادله‌ی $z = x^۲ + y^۲$ را رسم کنید.

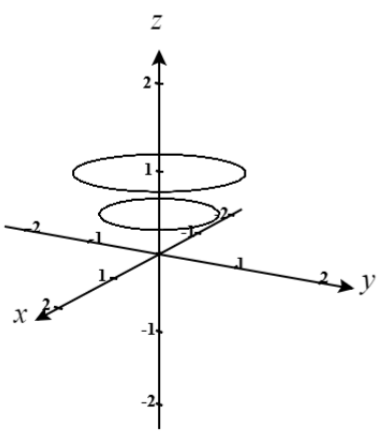
پاسخ.

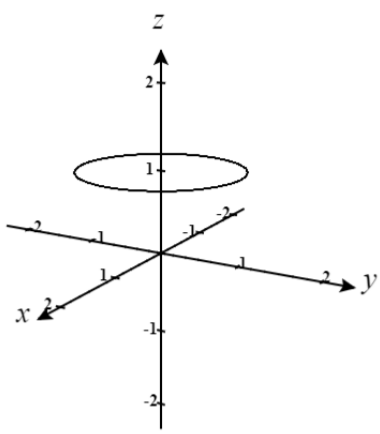
$$z = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x, y) = ۰.$$

$z < ۰ \Rightarrow$ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱$$

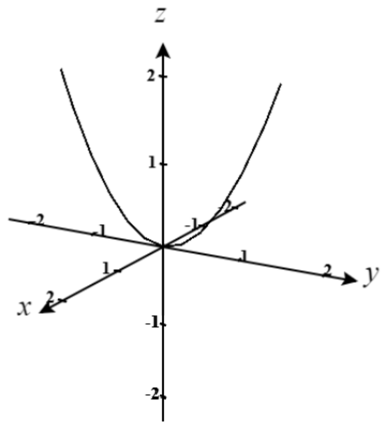
$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$ دایره



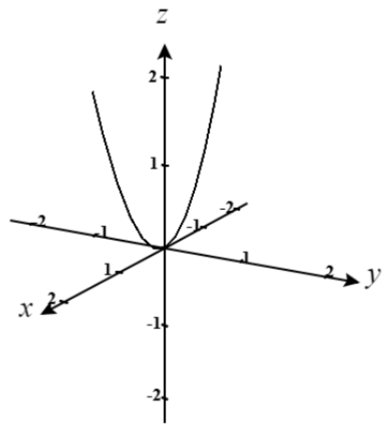


$$x = ۰ \Rightarrow z = y^۲$$

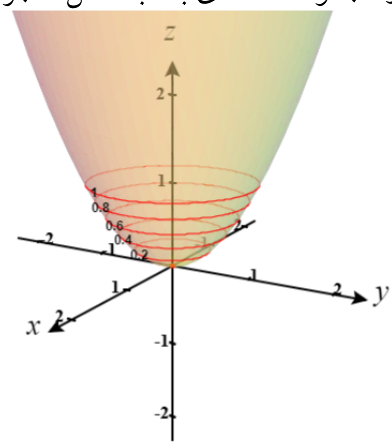
[۱] ellipsoid

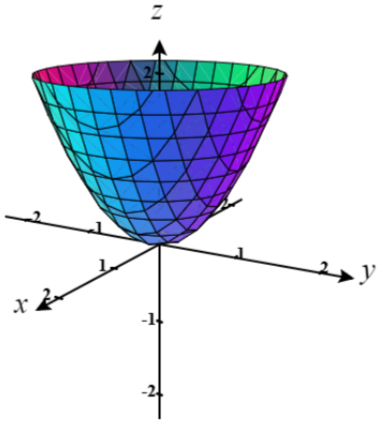


$$y = ۰ \Rightarrow z = x^۲$$



و مجموعاً معادله‌ی بالا به شکل منجر می‌شود.





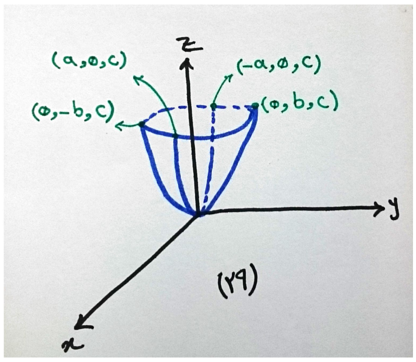
□

توجه ۲۷. در رسم اشکال از شما انتظار داریم که محل تلاقی شکل با محورها را دقیق مشخص کنید و مختصات آن را بنویسید.

مثال ۲۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $\frac{z}{c} = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}$ را رسم کنید. (فرض کرده‌ایم که $a, b, c > ۰$)

پاسخ.

$$z = ۰ \Rightarrow (x, y) = ۰$$
$$x = ۰ \Rightarrow z = \frac{c}{b^۲} y^۲$$



□

شکل بالا را به دو صورت می‌توان مجسم کرد. به صورت بیضی‌هائی که بزرگتر و بزرگتر می‌شوند و توسط سهمی به هم وصل شده‌اند؛ یا توسط سهمی‌هائی که دارند بالاتر و بالاتر می‌روند و شکل ظرف را ایجاد می‌کنند. توجه کنید که در بالا تنها مقطعی از شکل را کشیده‌ایم، با این فرض که شکل تا بی‌نهایت به همین صورت ادامه می‌یابد.

توجه ۲۹. هر مایعی در هر نوع ظرفی، در اثر دوران حول مرکز به شکل یک سهمی‌وار بیضوی درمی‌آید. در تلسکوپها، برای صرفه‌جوئی در هزینه‌ها، با دوران جیوه، عدسی مورد نظر خود را تولید می‌کنند. برای دیدن تلسکوپهای اینچنین و مایعهای تحت دوران، به پیوندهای زیر مراجعه کنید (هر چند متأسفانه یوتیوب فیلتر است!)

https://www.youtube.com/watch?v=Zip9ft1PgV0

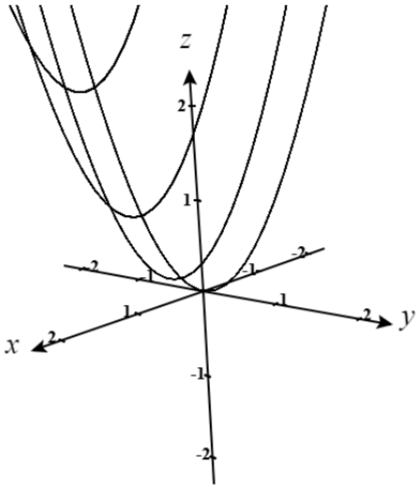
https://www.youtube.com/watch?v=oY4zeQA1hD0

https://www.youtube.com/watch?v=Q5Cr9P-Q88Y

https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_mirror_telescope

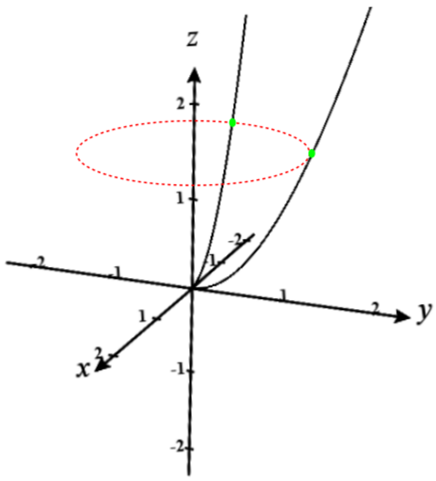
۳ نیم‌جلسه‌ی سوم، چهارشنبه

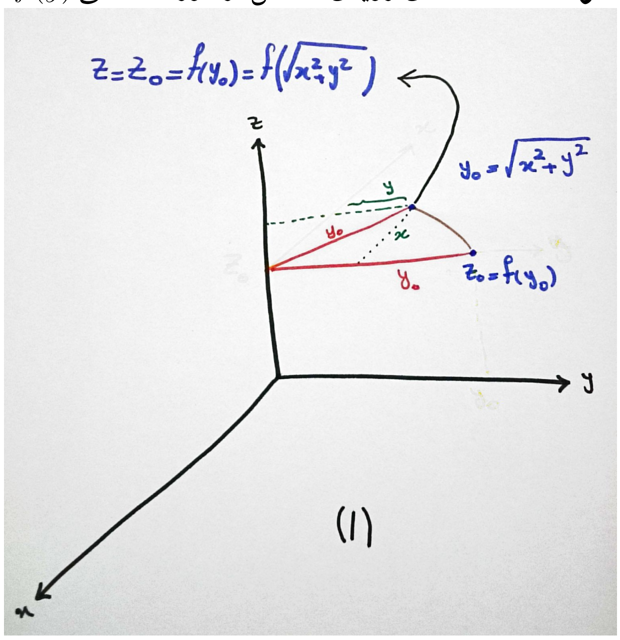
در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم که رویه‌ی به معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ را می‌توان مجموعه‌ی دوایری تصور کرد که شعاعشان با پیش رفتن در سوی محور z بیشتر و بیشتر می‌شود. این رویه را می‌توان همچنین مجموعه‌ی سهمی‌هائی نیز تصور کرد که هر چه بالاتر می‌روند باریکتر می‌شوند:

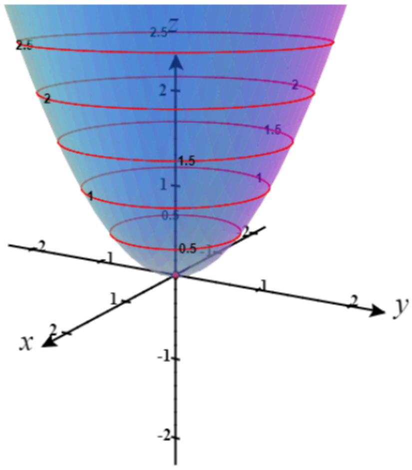


در زیر روش دیگری نیز برای نگاه کردن به رویه‌ی مورد نظر آورده‌ایم.

سوال ۳۰. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $z = f(y)$ حول محور z را بنویسید.







با توجه به اَشکالِ بالا (و توضیحاتی که در کلاس درس داده‌ایم) معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر عبارت است از $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

به طور کلی معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی به معادله‌ی ضمنی $f(z,y)=0$ حول محور z عبارت است از

$$f(z, \sqrt{x^2+y^2}) = 0$$

مثال ۳۱. رویه‌ی $z = x^2+y^2$ از دوران منحنی $z=y^2$ (یا $z=x^2$) حول محور z ایجاد می‌شود؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$z = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = f(\sqrt{x^2+y^2})$$

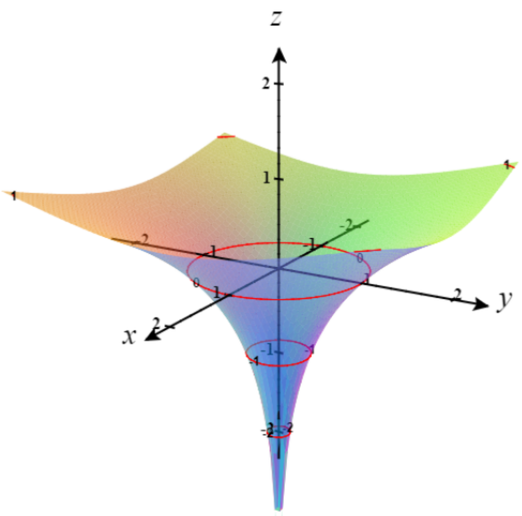
مثال ۳۲. رویه‌های زیر را رسم کنید.

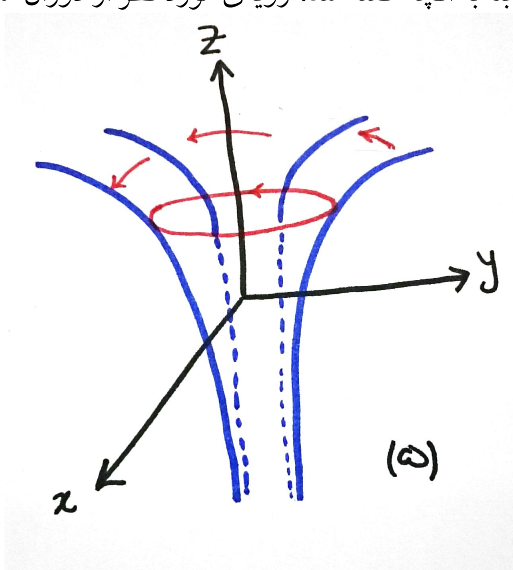
۱. $z = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

قرار دهید:

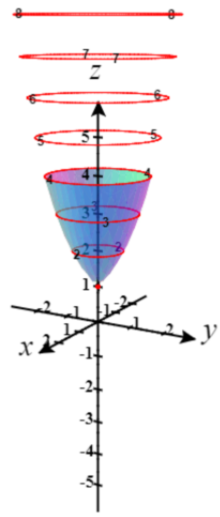
$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}).$$

بنا به آنچه گفته شد، رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی $z=\ln(y)$ حول محور z ایجاد می‌شود.





۲. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$؛ این رویه نیز از دوران منحنی $z = e^y$ (برای $y > 0$) حول محور z ایجاد می‌شود.



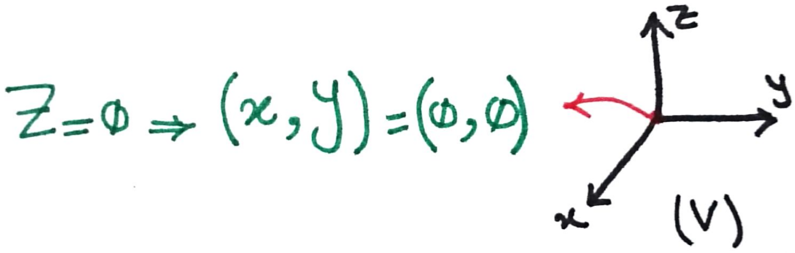
توجه ۳۳. از دوران منحنی $f(t_1, t_2) = 0$ حول محور t_1 به رویه‌ی $f(t_1, \pm\sqrt{t_3^2 + t_2^2}) = 0$ می‌رسیم؛ در این عبارت، برای $i \neq j$ داریم $t_i \neq t_j \in \{x, y, z\}$. این جمله را تفسیر کنید!

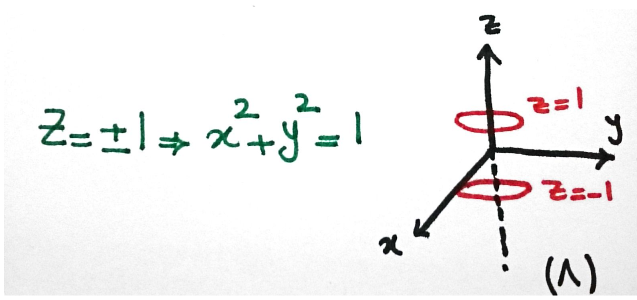
۱.۳ مخروطها

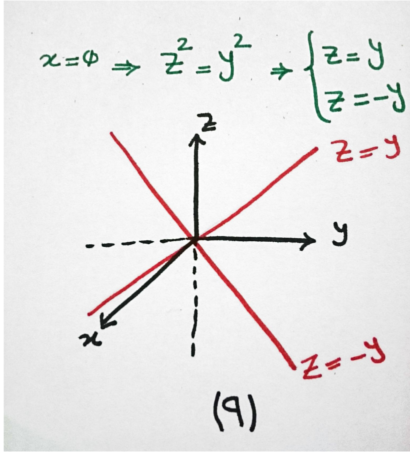
مثال ۳۴. رویه به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

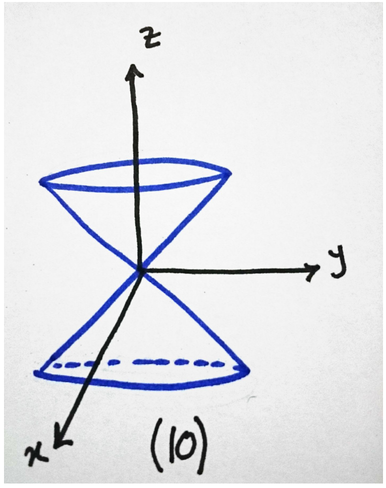
پاسخ. **روش اول.**



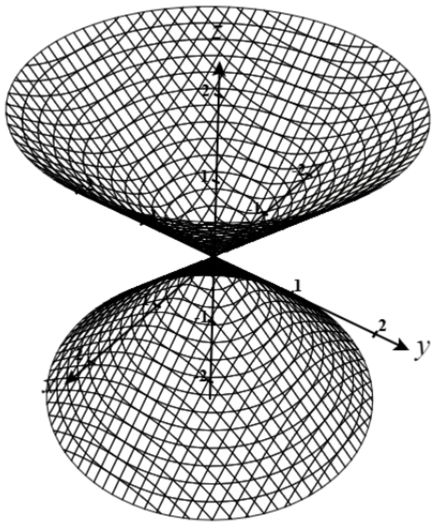




حاصل تلفیق شکل‌های بالا به صورت زیر است:



رویه‌ی مورد نظر را با نرم‌افزارهای رایانه‌ای به صورت زیر کشیده‌ایم:



روش دوم. معادله‌ی مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت: $z^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$ بنابراین شکل مورد نظر از دوران منحنی $z^2 = y^2$ حول محور z ایجاد می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران دو منحنی $z = \pm y$ حول محور z ایجاد می‌شود. □

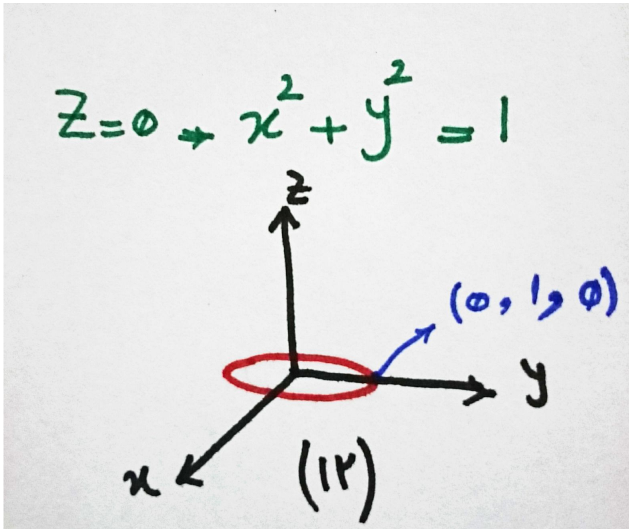
معادله‌ی کلّیِ یک مخروط به صورت زیر است:

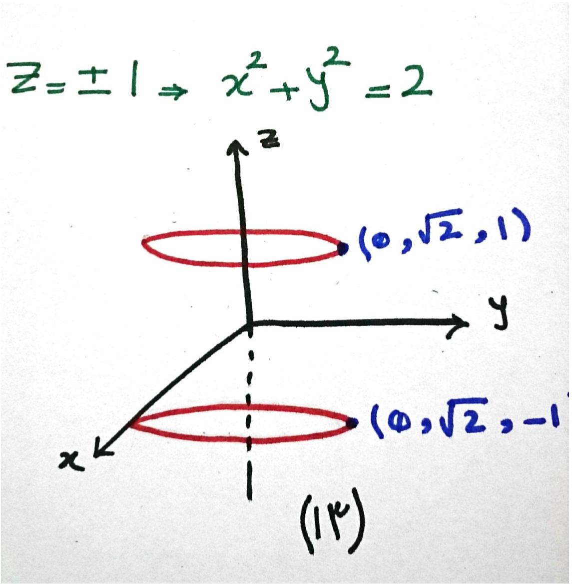
$$\frac{z^{۲}}{c^{۲}} = \frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}}$$

۲.۳ هذلولی‌وارِ یکپارچه

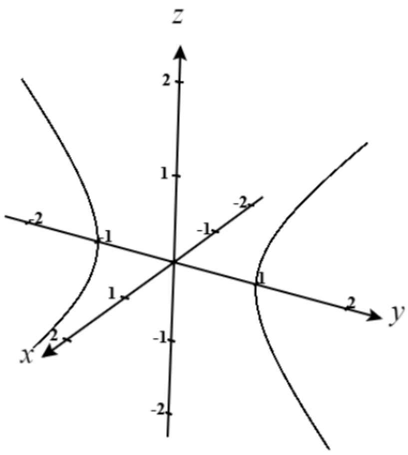
مثال ۳۵. رویه‌ی به معادله $z^{۲} + ۱ = x^{۲} + y^{۲}$ را رسم کنید.

پاسخ.

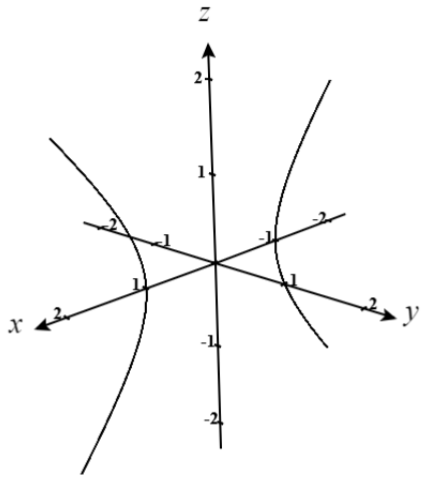




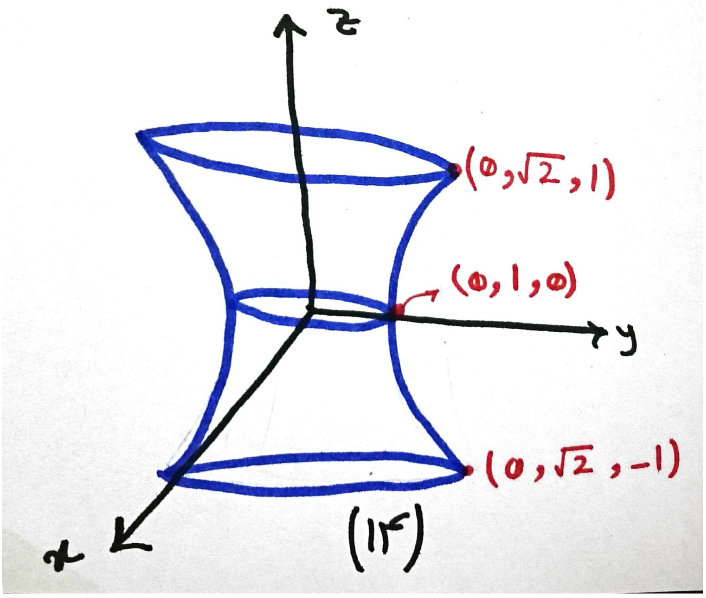
$$x = ۰ \Rightarrow y^{۲} - z^{۲} = ۱$$



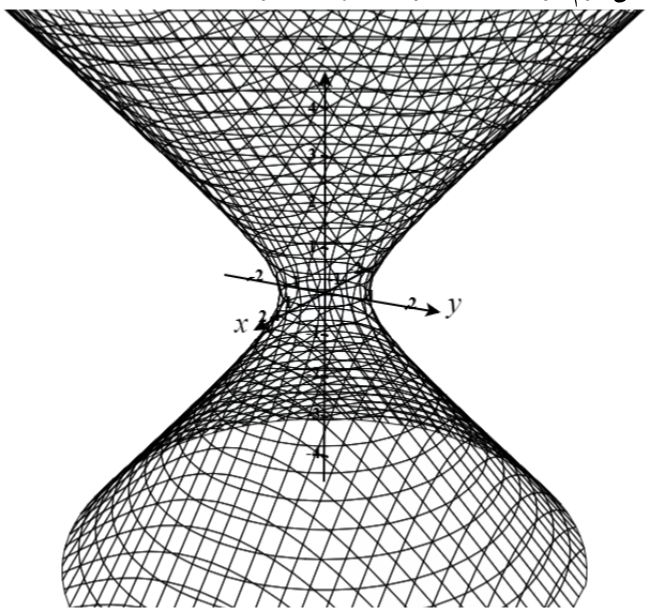
$$y = ۰ \Rightarrow x^{۲} - z^{۲} = ۱$$



نتیجه‌ی تلفیق چهار شکل بالا به صورت زیر است:



شکل نرم‌افزاری رویه نیز به صورت زیر است:



$\square$

تمرین ۱. شکل بالا را با استفاده از دوران رسم کنید.

پاسخ.

$$z^۲ + ۱ = (\sqrt{x^۲ + y^۲})^۲$$

پس رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی به معادله‌ی $y^۲ = ۱ + z^۲$ (یا $x^۲ = ۱ + z^۲$) حاصل می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران یک هذلولی. به شکل حاصل **هذلولوی یکپارچه** [۲] می‌گویند. □

معادله‌ی کلّیِ هذلولوی یکپارچه به صورت زیر است:

$$\frac{z^۲}{c^۲} + ۱ = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}$$

توجه ۳۶. (سوال یکی از دانشجویان) برای رسم معادله‌ی $z^۲ + ۲ = x^۲ + y^۲$ طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، تا به معادله‌ی استاندارد بالا برسیم.

$$\frac{z^۲}{(\sqrt{۲})^۲} + ۱ = \frac{x^۲}{(\sqrt{۲})^۲} + \frac{y^۲}{(\sqrt{۲})^۲}$$

[۲] Hyperboloid of one sheet

۴ جلسه‌ی چهارم، شنبه

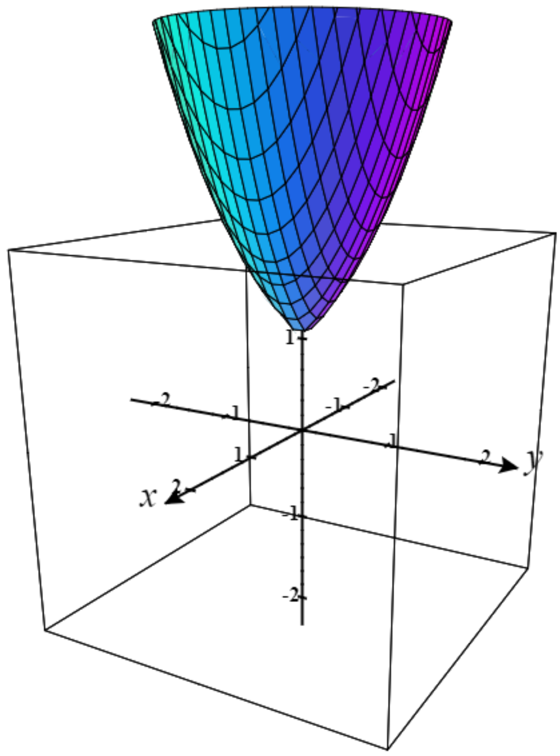
نخست مطلبی از جلسه‌ی قبل را یادآوری می‌کنیم:

توجه ۳۷. رویه‌ی $z = e^{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ را رسم کنید.

بنا به آنچه ثابت کرده‌ایم رویه‌ی بالا از دوران منحنی $z = e^y$ حول محور z بدست می‌آید. به این نکته نیز باید توجه کرد که بنا به ضابطه‌ی تابع، باید $y > ۰$ در نظر گرفته شود.

$$z = f(\sqrt{x^۲ + y^۲}) = f(y)$$

باید منحنی $z = e^y$ برای $y > ۰$ را حول محور z دوران دهیم:



۱.۴ هذلولی‌وار دوپارچه

مثال ۳۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{z^۲}{c^۲} - ۱$$

پاسخ.

توجه ۳۹. شکل را با فرضِ

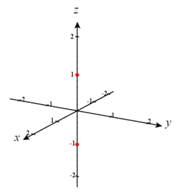
$$a = b = c = ۱$$

رسم می‌کنیم؛ به بیان دیگر معادله‌ی زیر را رسم می‌کنیم.

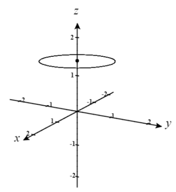
$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

در فاصله‌ی $z \in (-1, 1)$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

در $z = \pm 1$ تنها نقطه‌ی $(x, y) = (0, 0)$ را داریم.

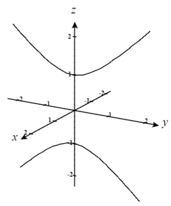


برای $z = k > 1$ معادله‌ی یک دایره را داریم:



برای $z = k < -1$ نیز دایره داریم. در صفحه‌ی $x = 0$ داریم:

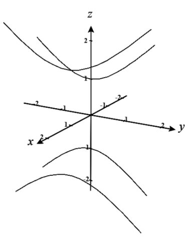
$$z^2 - y^2 = 1$$



در صفحه‌ی $x = 1$:

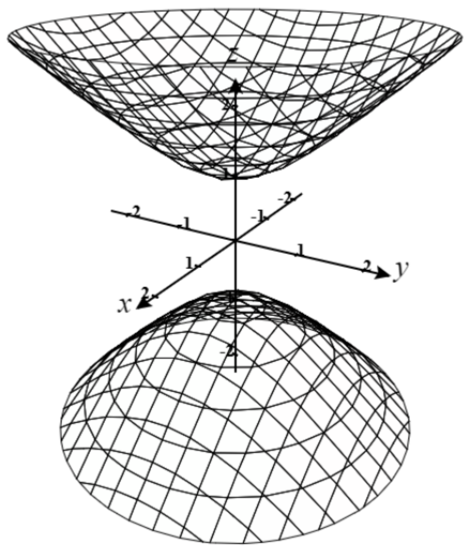
$$x = 1 \Rightarrow z^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

در زیر تصاویر ایجاد شده در صفحات $x = 1, x = \frac{1}{2}$ را رسم کرده‌ایم:

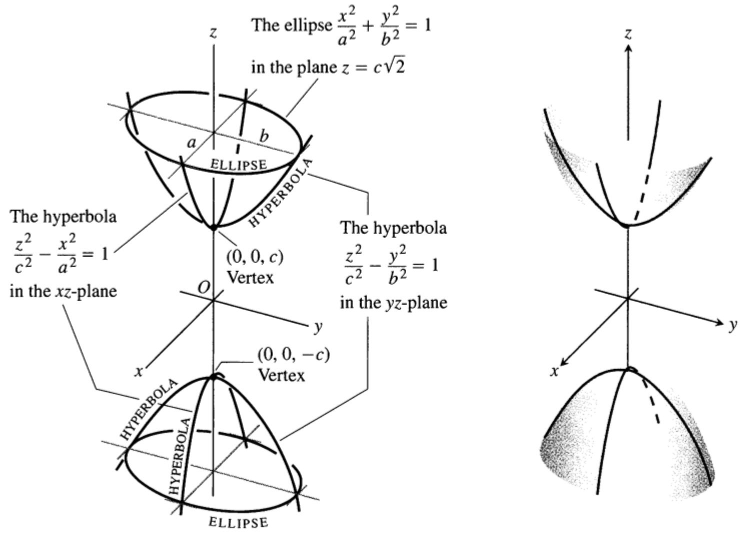


تحلیل شکل بالا برای مقادیر مختلف y را به عهده‌ی شما می‌گذاریم.

شکل کلی به صورت زیر است:



در زیر شکل را برای مقادیر دلخواه a, b, c کشیده‌ایم:



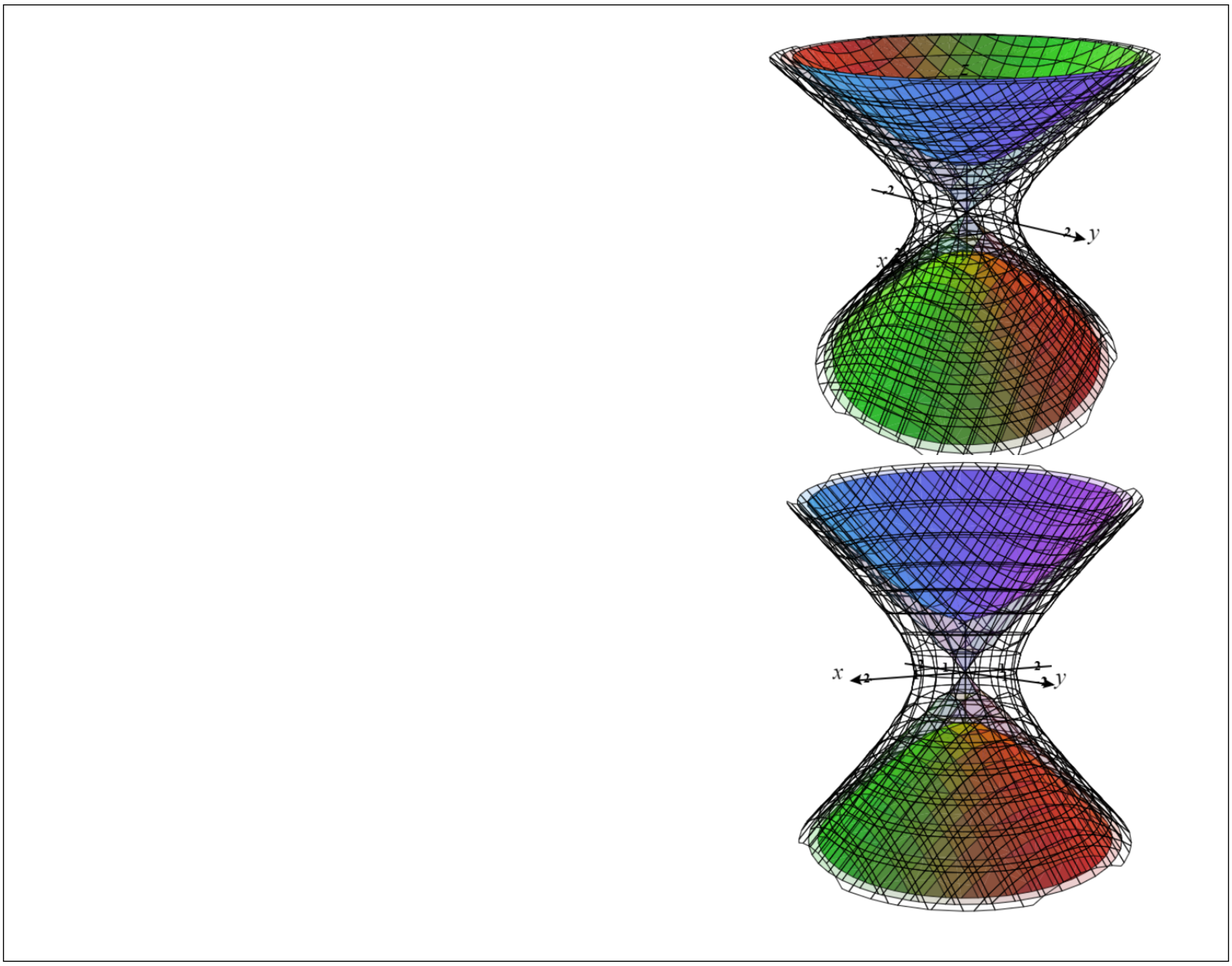
به شکل بدست آمده یک **هذلولوی‌وار دو پارچه** [۳] گفته می‌شود. این شکل با حرکت هذلولی‌های موازی صفحه‌ی zx و حرکت هذلولی‌های موازی محور zy ایجاد شده است. $\square$

جمعبندی ۱. رسم سه معادله‌ی

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} \\ x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} + ۱ \\ x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} - ۱ \end{cases}$$

در یک دستگاه مختصات به صورت همزمان به صورت زیر است:

[۳] hyperboloid of two sheets



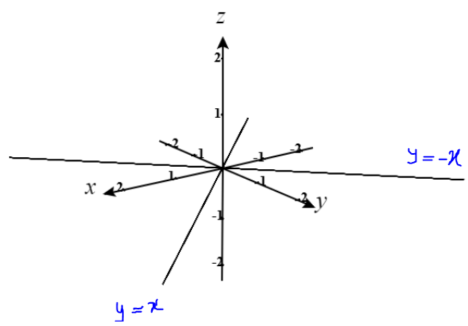
۲.۴ سهمی‌وار هذلولوی

مثال ۴۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

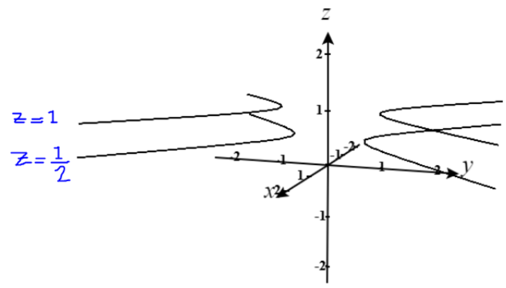
$$z = y^۲ - x^۲$$

پاسخ.

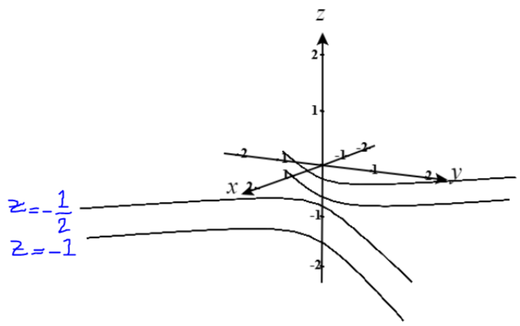
$$z = ۰ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۰ \Rightarrow (y-x)(y+x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



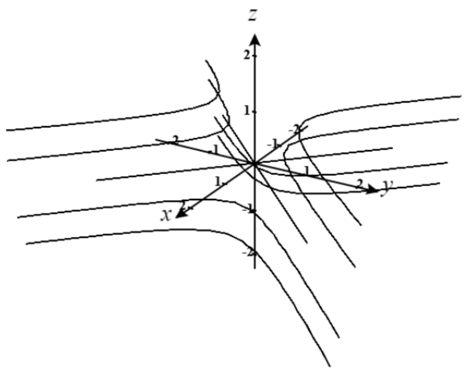
$$z = ۱ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۱$$
$$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{y^۲}{۲} - \frac{x^۲}{۲} = ۱$$



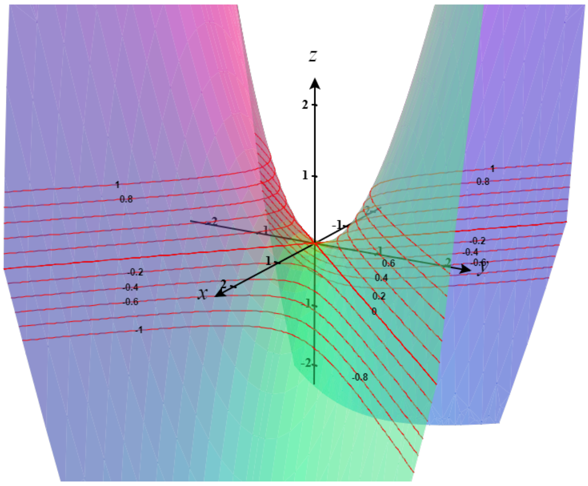
$$z = -۱ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۱$$
$$z = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} - \frac{y^۲}{۲} = ۱$$

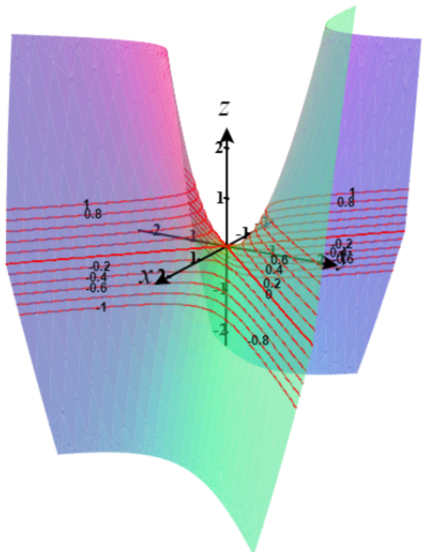


تلفیق سه شکل بالا به صورت زیر است:



شکل کلی به صورت زیر است:

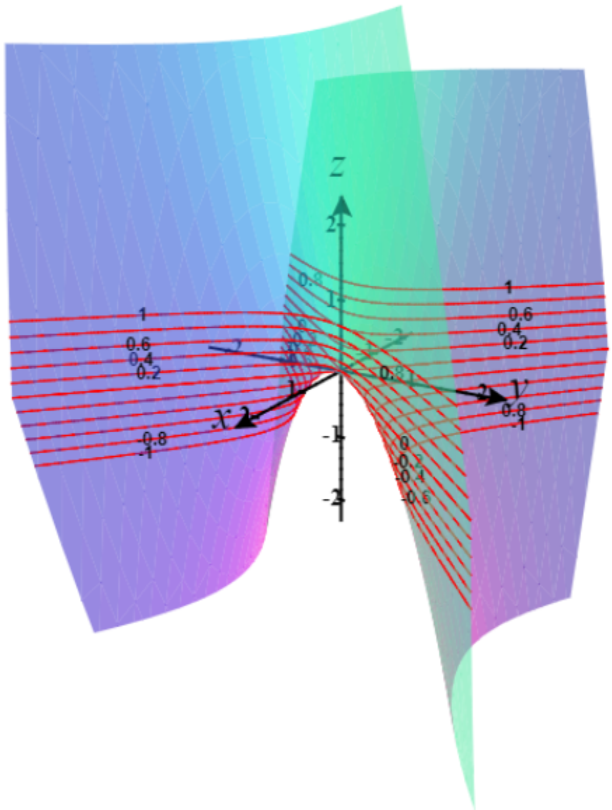




به شکل حاصل **سهمی‌وار هذلولوی** [۴] گفته می‌شود. این نکته جالب‌توجه است که درشکل بالا، به ازای مقادیر $z = k > 0$ یک سری هذلولی موازی صفحه‌ی xy داریم که به سمت محور y باز می‌شوند. این هذلولی‌ها با کم شدن مقدار k تغییر می‌کنند تا این که در $z = k = 0$ دو خط متقاطع داریم. پس از آن در $z = k < 0$ هذلولی‌هائی موازی صفحه‌ی xy داریم که به سمت محور x باز می‌شوند. $\square$

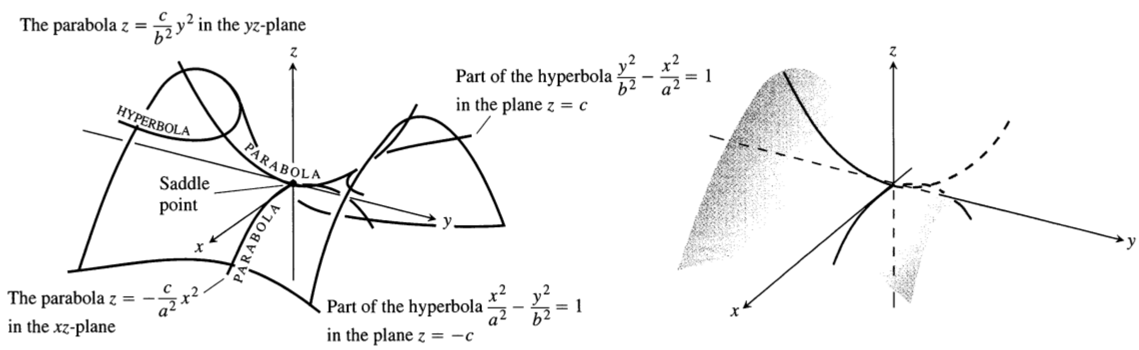
توجه ۴۱. نمودار معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ به شکل زیر است:

[۴] hyperbolic paraboloid



معادله‌ی کلی سهمی‌وار هذلولوی به شکل زیر است:

$$\frac{z}{c} = \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{x^۲}{a^۲} \quad c > ۰$$



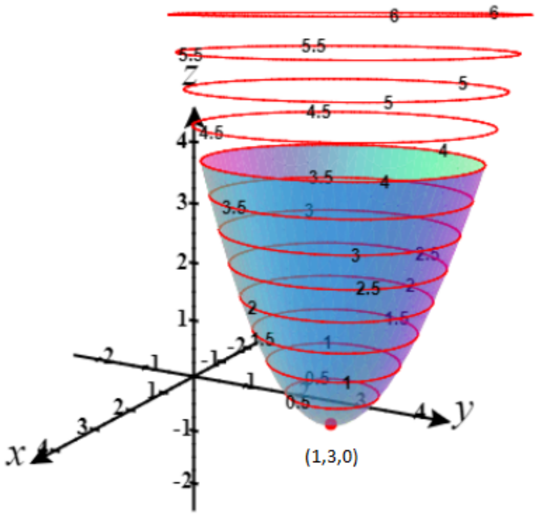
برای حل تمرین درباره‌ی این بخش درس، به صفحه‌ی ۸۸۰ (بخش ۶-۱۲) کتاب استوارت مراجعه کنید. پیش از این که از این بخش خارج شویم چند تمرین با هم حل می‌کنیم و چند تمرین حل نشده نیز برای شما باقی می‌گذاریم.

۳.۴ مثالها و تمرینها

مثال ۴۲. معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y - z + ۱۰ = ۰$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید.

پاسخ.

$$(x-1)^2+(y-3)^2=z$$



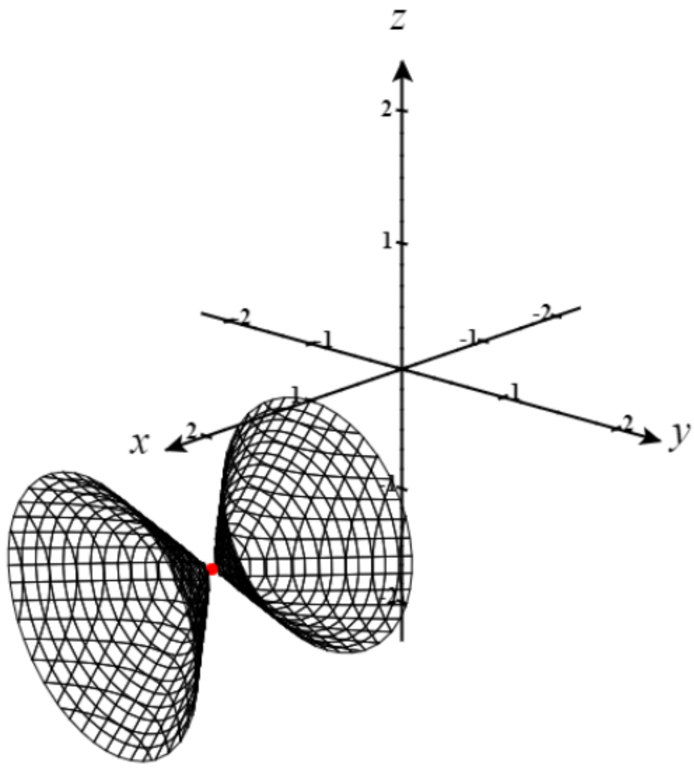
برای رسم رویه‌ی بالا، کافی است رویه‌ی $z=x^2+y^2$ را در راستای بردارِ $(1,3,0)$ انتقال دهیم. شکل حاصل یک سهمی‌وار است. $\square$

مثال ۴۳. معادله‌ی $x^2-y^2-z^2-4x-2z+3=0$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید و نام رویه را ذکر کنید.

پاسخ.

$$(x-2)^2-4+3=y^2+(z+1)^2-1 \Rightarrow (x-2)^2=y^2+(z+1)^2$$

معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک مخروط موازی محور x هاست. برای رسم آن، مخروطِ $x^2=y^2+z^2$ را در راستای بردار $(2,0,-1)$ انتقال می‌دهیم.



□

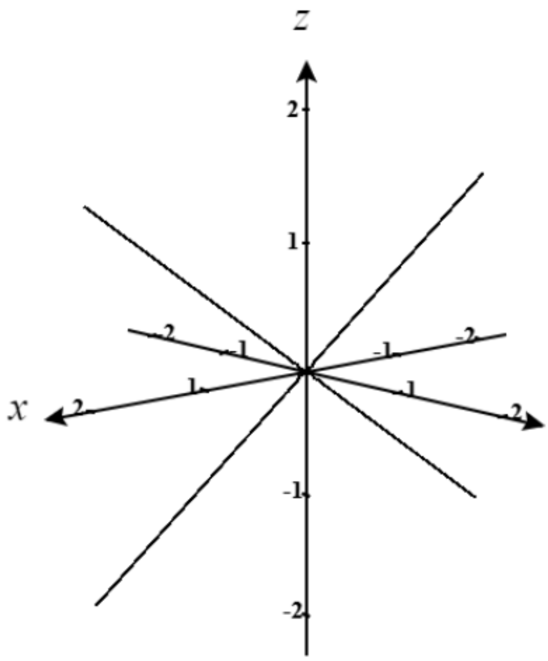
مثال ۴۴. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $x^۲ + ۲y - ۲z^۲ = ۰$ را رسم کنید و نام رویه را بنویسید.

پاسخ.

$$x^۲ - ۲z^۲ = -۲y \Rightarrow y = z^۲ - \frac{x^۲}{۲}$$

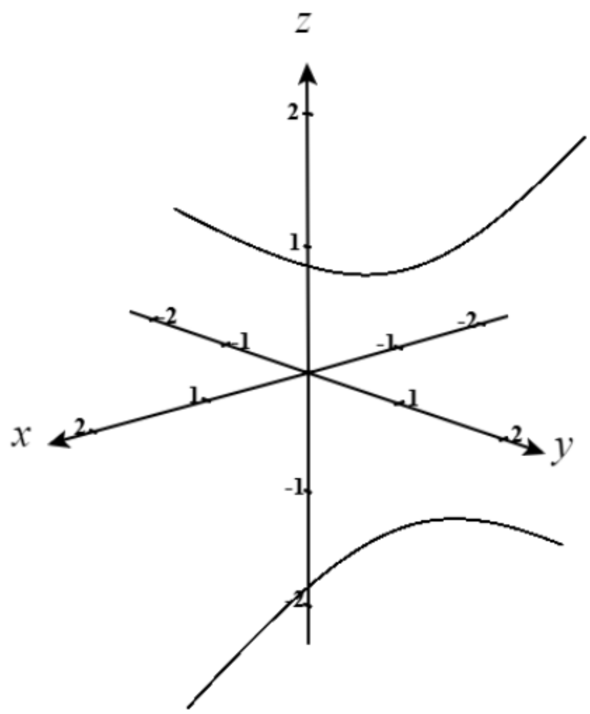
معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک سهمی‌وار هذلولوی است. برای رسم راحتتر به نکات زیر توجه می‌کنیم: در صفحه‌ی $y = ۰$ داریم:

$$۲z^۲ = x^۲ \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$$

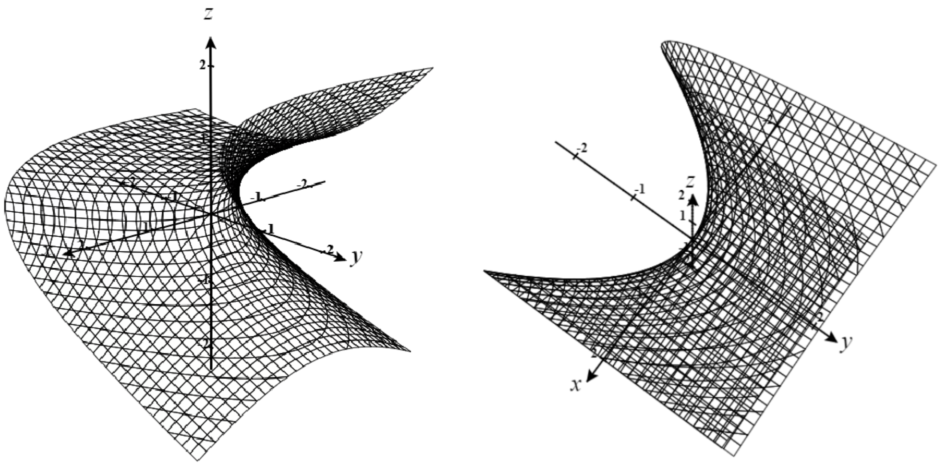


و در صفحه‌ی $y = ۱$ یک هذلولوی داریم:

$$z^۲ - \frac{x^۲}{۲} = ۱$$



شکل کلی نیز به صورت زیر است:



□

تمرین ۲. رویه‌های زیر را رسم کنید و نام آنها را ذکر کنید. نقاط تقاطع شکل با محورها را معین کنید.

۱. $y^۲ = x^۲ + \frac{۱}{۹}z^۲$

۲. $x^۲ - y^۲ - z^۲ - ۴x - ۲z + ۳ = ۰$

۳. $x^۲ - y^۲ + z^۲ - ۴x - ۲z = ۰$

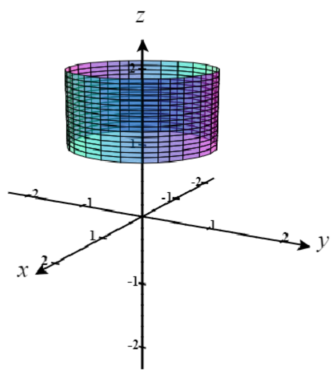
۴. $۴x^۲ - y + ۲z^۲ = ۰$

۵. $y^۲ = x^۲ + ۴z^۲ + ۴$

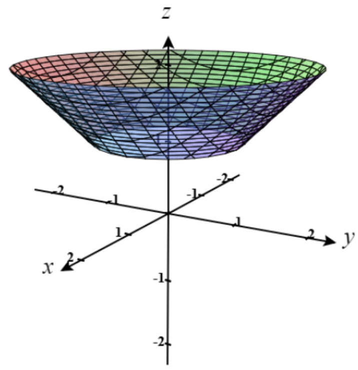
مثال ۴۵. معادله‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بیابید.

مثال ۴۶. ناحیه‌ی محاط شده بین رویه‌های $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $x^۲ + y^۲ = ۱$ را برای $۱ \leqslant z \leqslant ۲$ را رسم کنید.

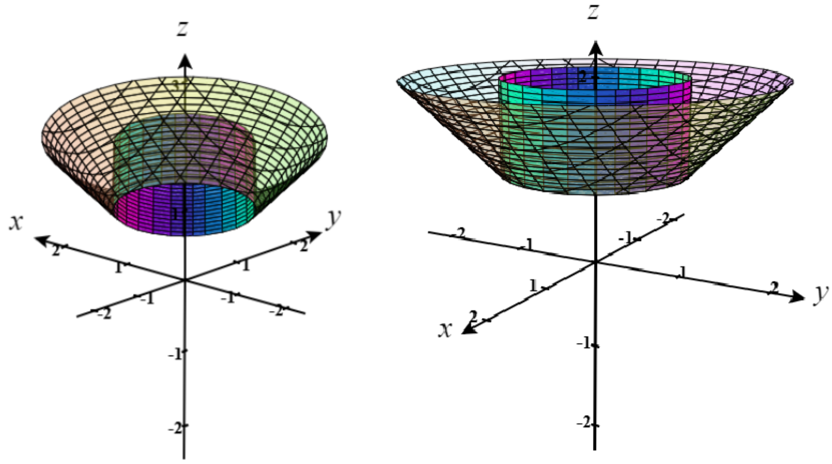
پاسخ. شکل معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در $۱ \leqslant z \leqslant ۲$ به صورت زیر است:



شکل معادله‌ی $z^۲ = x^۲ + y^۲$ در $۱ \leqslant z \leqslant ۲$ به صورت زیر است:



شکل حاصل از تلفیق این دو شکل به صورت زیر است:

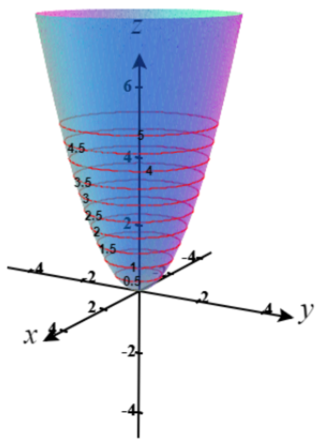


هاشور زدن ناحیه‌ی مورد نظر، به عهده‌ی شما! □

تمرین ۳. یک معادله‌ی دلخواه از درجه‌ی دوم بنویسید و رویه‌ای را که آن معادله‌ی مشخص می‌کند رسم کنید.

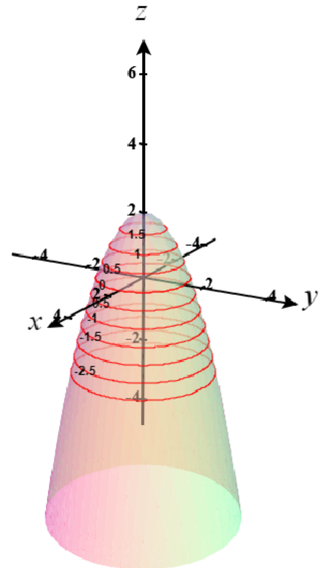
مثال ۴۷. ناحیه‌ی محاط شده توسط سهمی‌وارهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2 - x^2 - y^2$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ به شکل زیر است:

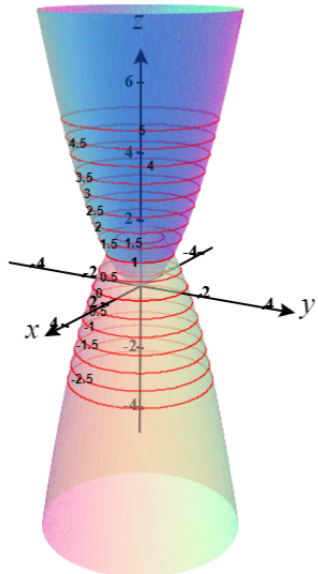


و معادله‌ی $z = ۲ - x^۲ - y^۲$ نیز به شکل زیر است:

$$x^۲ + y^۲ = ۲ - z$$



دو شکل روی یک دستگاه مختصات به صورت زیر قرار می‌گیرند:



تعیین ناحیه‌ی اشتراک، به عهده‌ی شما! □

تمرین ۴. معادله‌ی شکل حاصل از دورانِ منحنیِ $z = ۲y$ حول محور z را بنویسید.

تمرین ۵. مکان هندسی نقاطی را بیابید که فاصله‌ی آنها از صفحه‌ی $x = ۱$ برابر است با فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $(-۱, ۰, ۰)$. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

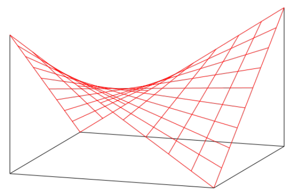
تمرین ۶. معادله‌ی رویه‌ای را بیابید که از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۷. فرض کنید که نقطه‌ی (a, b, c) روی رویه‌ی $z = y^۲ - x^۲$ واقع باشد. نشان دهید که دو خط زیر (که از نقطه‌ی

یادشده می‌گذرند) روی این رویه واقعند:

$$(a,b,c)+t(۱,۱,۲(b-a)) \quad (a,b,c)+t(۱,-۱,-۲(b+a))$$

در واقع رویه‌ی مورد نظر را می‌توان با خطکش رسم کرد!



در پیوند زیر در این‌باره بیشتر مطالعه کنید.

https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled_surface

۴.۴ توابع دو متغیره

منظور از یک **تابع دو متغیره** ضابطه‌ای است مانند f که هر نقطه‌ی (x,y) در یک مجموعه‌ی $D\subseteq \mathbf{R}^۲$ را به یک نقطه‌ی یکتای $z\in \mathbf{R}$ می‌برد.

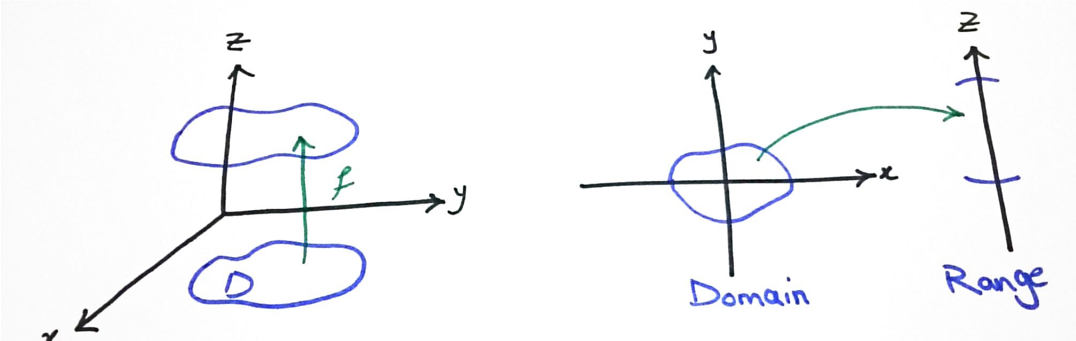
$$f: D\subseteq \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$$

$$(x,y)\mapsto f(x,y)$$

مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابع می‌خوانیم.

مجموعه‌زیر را **بُرد** تابع می‌خوانیم.

$$\{f(x,y)\in \mathbf{R} | (x,y)\in D\}$$



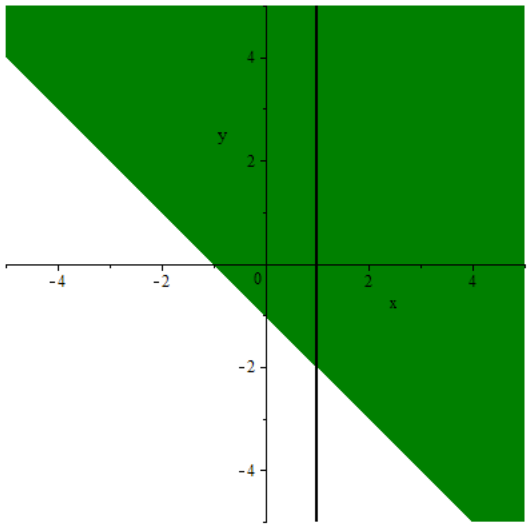
(۲۸)

مثال ۴۸. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید و مقدار آن را $(۳,۲)$ محاسبه کنید.

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+۱}}{x-۱}$$

پاسخ.

$$D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^۲ | x+y+۱\geqslant ۰, x\neq ۱\}$$



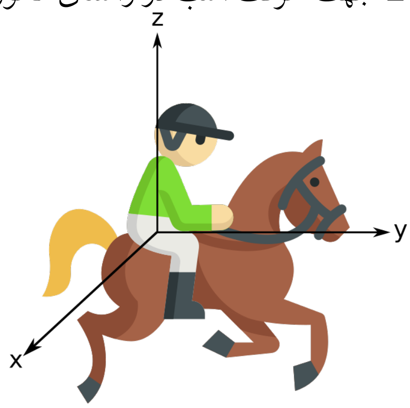
توجه کنید که خط $x = ۱$ جزو دامنه نیست. محاسبه‌ی مقدار تابع در نقطه‌ی داده شده به عهده‌ی شما! □

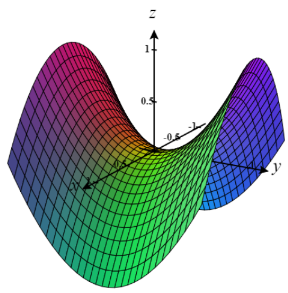
۵ جلسه‌ی پنجم، دوشنبه

پیش از ادامه‌ی دادن بحث توابع، دو نکته را درباره‌ی مباحث گذشته ذکر می‌کنیم.

توجه ۴۹. برای رسم معادله‌ی $z = y^2 - x^2$ به نکته‌های زیر توجه کنید که

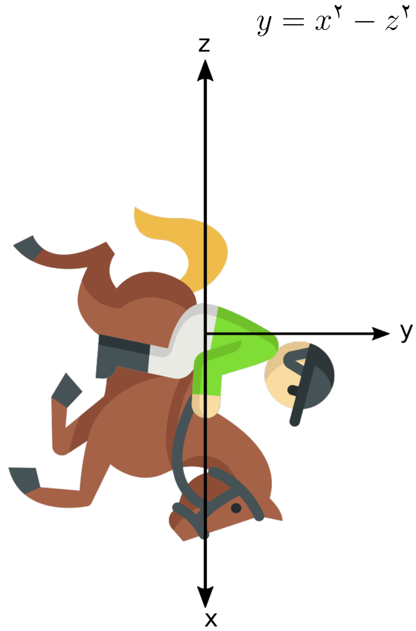
- سر سوارکار در راستای محور z باشد،
- جهت حرکت اسب در راستای محور y باشد.

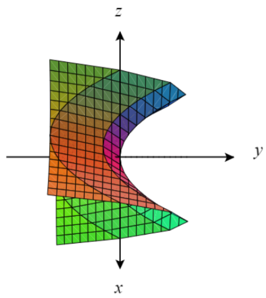




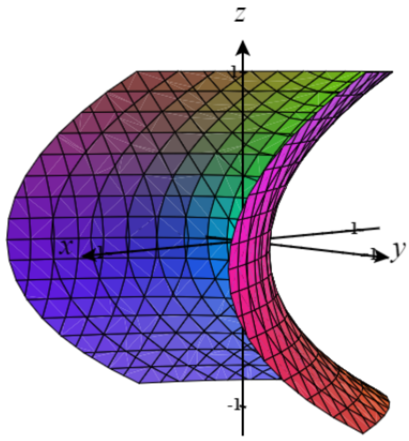
مثال ۵۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید:

۱. $y = x^2 - z^2$





۲. $x = y^{۲} - z^{۲}$



چند مثال نیز از بحث دوران حل می‌کنیم:

مثال ۵۱. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بنویسید، نوع رویه را مشخص کنید و آن را رسم کنید.

پاسخ. اگر داشته باشیم:

$$f(x, y) = y - \sqrt{x} = ۰$$

آنگاه از دوران $f(x, y)$ حول محور x معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$f(x, \pm\sqrt{y^{۲} + z^{۲}}) = \pm\sqrt{y^{۲} + z^{۲}} - \sqrt{x} = ۰$$

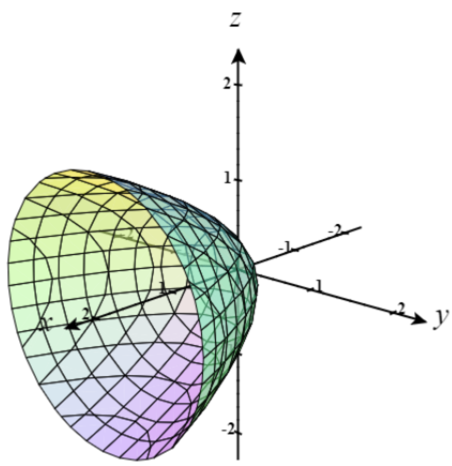
با توجه به معادله‌ی اولیه به دلیل آنکه $y > ۰$ است، مقادیر مثبت $\sqrt{y^{۲} + z^{۲}}$ مدنظر ماست. در نتیجه داریم:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^{۲} + z^{۲}}$$

اگر دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$x = y^{۲} + z^{۲}$$

شکل حاصل سهمی‌وار است.



□

۱.۵ ادامه‌ی مبحث توابع

مثال ۵۲. دامنه‌ی توابع زیر را مشخص و رسم کنید:

۱. $f(x,y) = x\ln(y^{۲} - x)$

پاسخ.

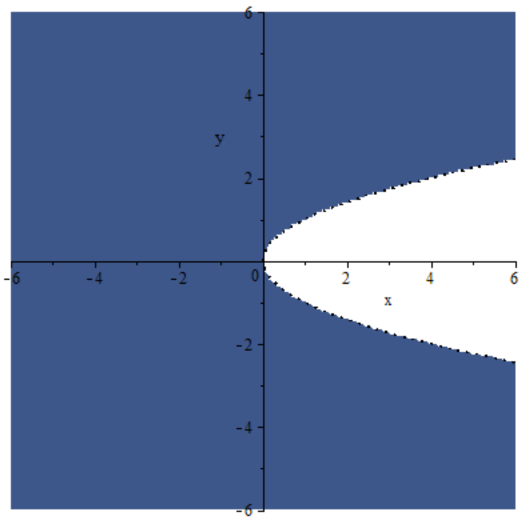
توجه ۵۳. معادله‌ی بالا را به شکل دیگری می‌توان نوشت:

$$z = x\ln(y^{۲} - x)$$

در این معادله x و y متغیرهای مستقل هستند و z متغیر وابسته به متغیرهای x و y است.

بنا به دامنه‌ی تابع $\ln$ باید داشته باشیم:

$$y^{۲} - x > ۰$$



□

برد تابع نیز $\mathbf{R}$ است.

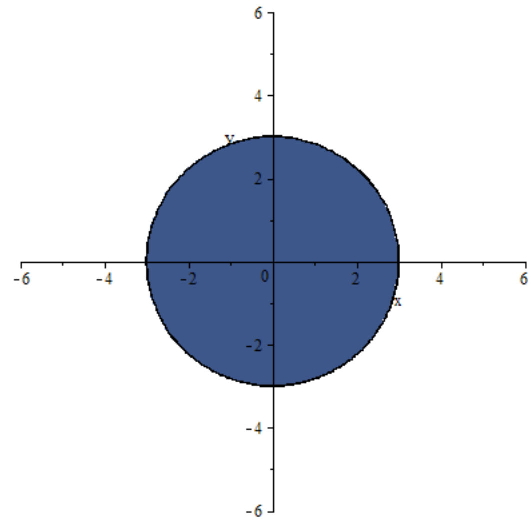
۲. $g(x,y) = \sqrt{۹ - x^{۲} - y^{۲}}$

پاسخ.

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ | ۹ - x^۲ - y^۲ \geqslant ۰\}$$

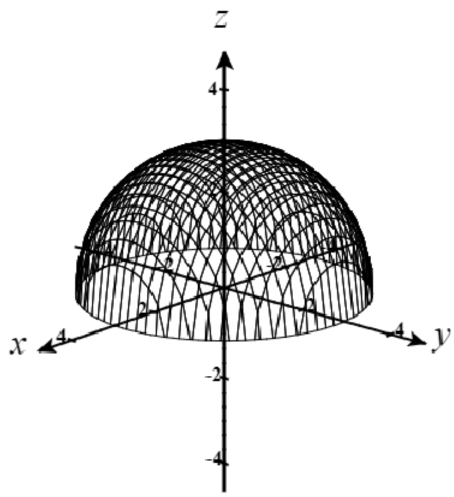
پس داریم:

$$D = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ \leqslant ۹\}$$



$$Range(g) = [۰, ۳]$$

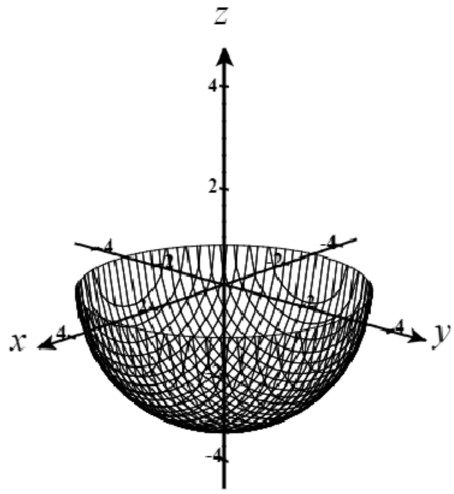
اگر بخواهیم تابع را رسم کنیم شکل آن به صورت زیر است:



توجه کنید که از آنجا که $z > ۰$ تنها بخش بالائی کره باید رسم شود (اگر داشته باشیم

$$z = -\sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$$

آنگاه شکل رویه به صورت زیر است:)



□

تعریف ۵۴. فرض کنید $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع باشد. مجموعه‌ی زیر را گراف تابع f می‌نامیم.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^۳ | (x, y) \in Dom(f), z = f(x, y)\}$$

مثال ۵۵. گراف تابع زیر را رسم کنید.

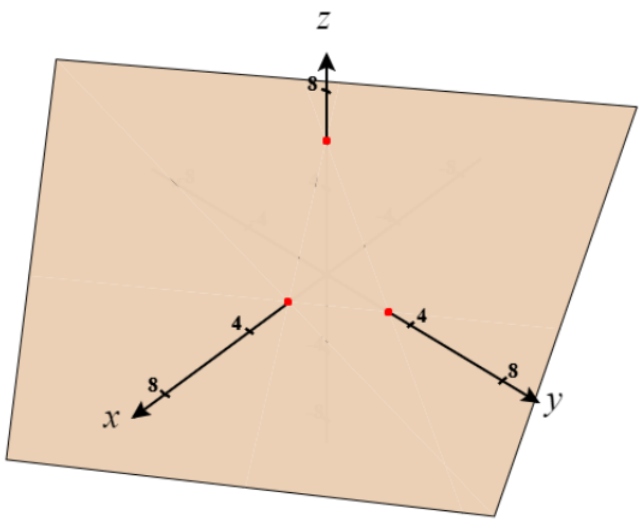
$$f(x, y) = ۶ - ۳x - ۲y$$

پاسخ.

یادآوری ۵۶. معادله‌ی $ax + by + cz = d$ معادله‌ی یک صفحه با بردار نرمالِ (a, b, c) است.

کافیست سه نقطه پیدا کنیم که در معادله‌ی $z = ۶ - ۳x - ۲y$ صدق کنند.

$$(۰, ۰, ۶) \quad (۰, ۳, ۰) \quad (۲, ۰, ۰)$$



□

مثال ۵۷. دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید و گراف آن را رسم کنید:

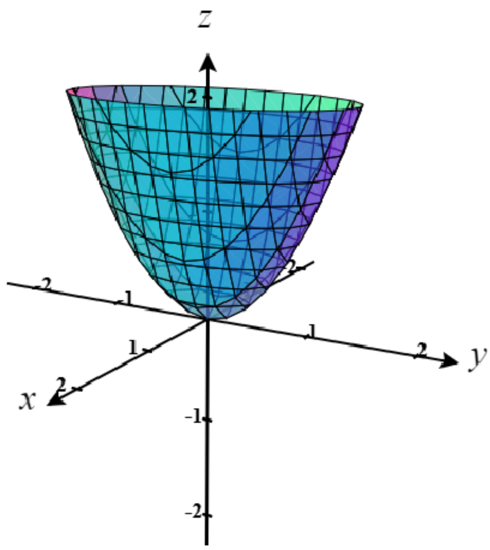
$$h(x, y) = ۴x^۲ + y^۲$$

پاسخ.

$$D(h) = \mathbf{R}^{۲}$$

$$range(h) = \mathbf{R}^{\geqslant ۰}$$

$$z = ۴x^{۲} + y^{۲} = (۲x)^{۲} + y^{۲}$$



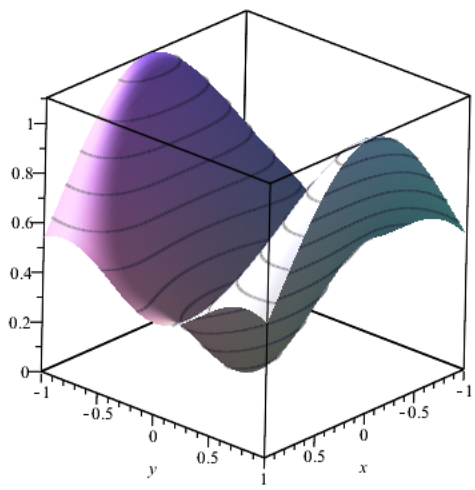
□

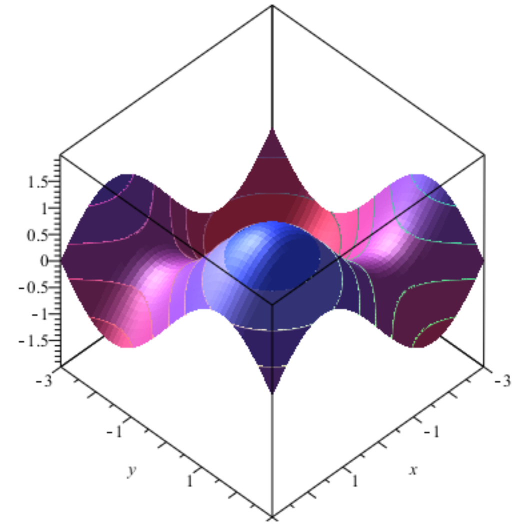
مثال ۵۸. حدس بزنید کدام شکل زیر مربوط به کدام معادله است:

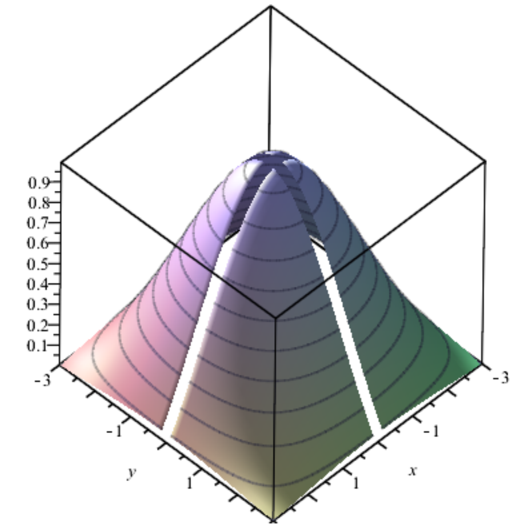
۱. $f(x,y) = (x^{۲} + ۳y^{۲})e^{-x^{۲}-y^{۲}}$

۲. $f(x,y) = \sin x + \sin y$

۳. $f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

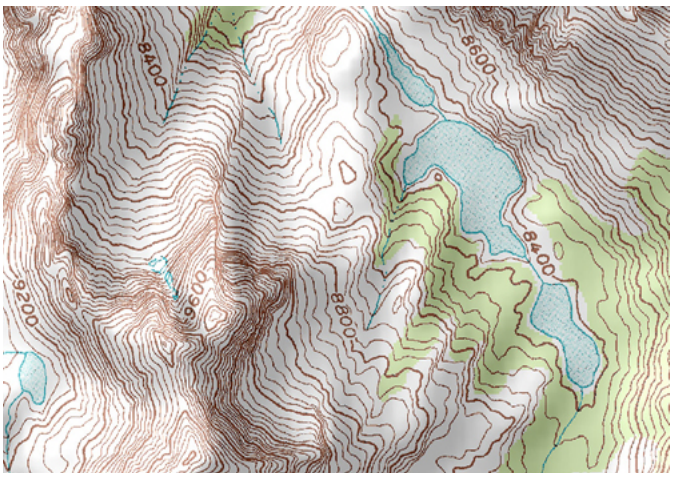






۲.۵ منحنی‌های تراز

احتمالاً درباره‌ی نقشه‌های توپوگرافیک شنیده‌اید. در این نقشه‌ها، مشخص می‌کنند که عوارض روی زمین در ارتفاعهای مشخص به چه صورتند. در زیر یک نمونه از چنین نقشه‌هائی را گذاشته‌ایم:



فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع باشد. به هر منحنیِ $f(x, y) = k$ در صفحه‌ی xy یک **منحنی تراز** برای تابع f گفته می‌شود. مجموعه‌ی منحنی‌های تراز یک تابع را به صورت همزمان در فضای دوبعدیِ xy رسم می‌کنند.

توجه ۵۹. دو مفهوم متفاوت داریم:

۱. منحنی‌های تراز (که در بالا تعریفشان کردیم [5])

۲. منحنی‌های هم‌مسیر [6] (منحنی‌هائی فضائی هستند که از اشتراگیری صفحاتِ $z = k$ با نمودار تابعِ $z = f(x, y)$ ایجاد می‌شوند. تفاوت این منحنی‌ها با منحنی‌های تراز این است که این منحنی‌ها را در فضای $\mathbb{R}^3$ رسم می‌کنند).

مثال ۶۰. منحنی‌های تراز تابع $z = y^2 - x^2$ را به ازای $z = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ رسم کنید.

پاسخ.

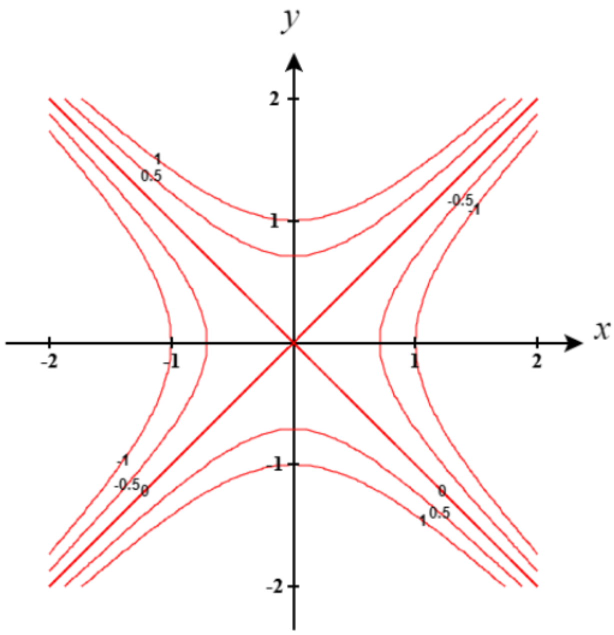
$$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

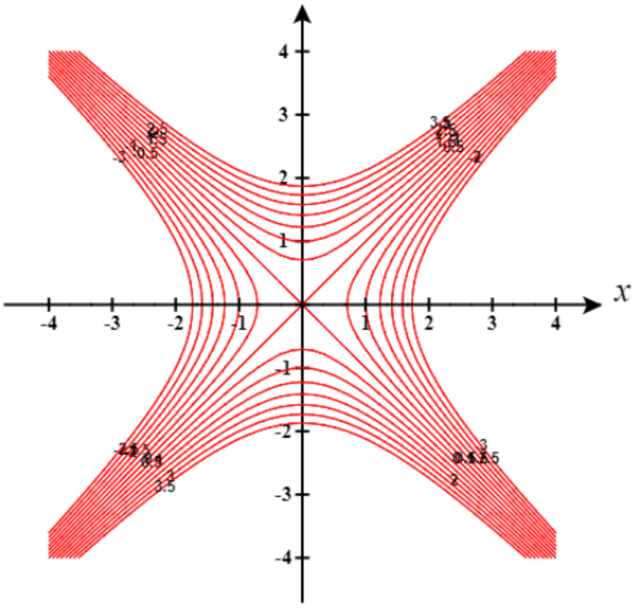


نقشه‌ی کاملتر منحنی‌های تراز تابع بالا به صورت زیر است:

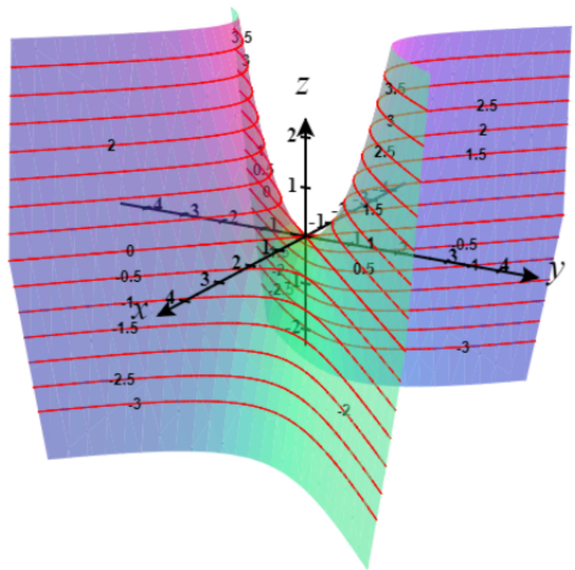
---

[5] level curves

[6] contour maps



در زیر منحنی‌های هم‌مسیر با تابع بالا را رسم کرده‌ایم:



□

مثال ۶۱. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

$$z = \frac{-۳y}{x^۲ + y^۲ + ۱}$$

پاسخ.

$$z = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow \text{محور x}$$

$$z = ۱ \Rightarrow x^۲ + (y + \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۵}{۴}$$

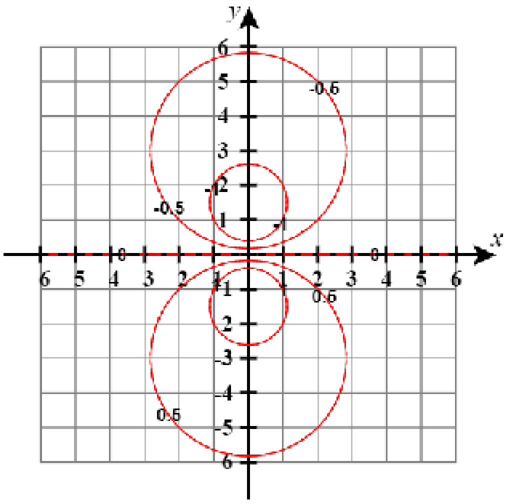
$$z = -۱ \Rightarrow x^۲ + (y - \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۵}{۴}$$

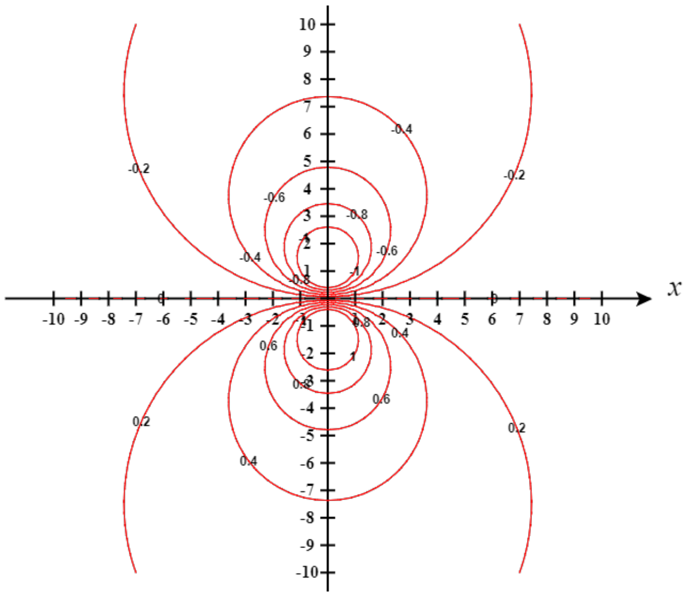
$$z = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y + \frac{۳}{۴})^۲ - \frac{۹}{۱۶} + ۱ = ۰$$

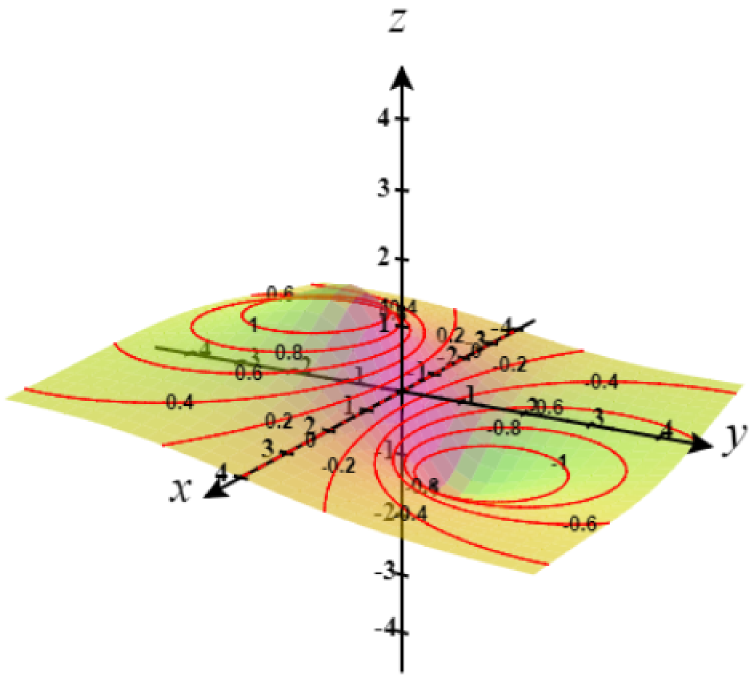
معادله‌ی بالا جوابی ندارد. پس در $z = ۲$ شکلی نداریم.

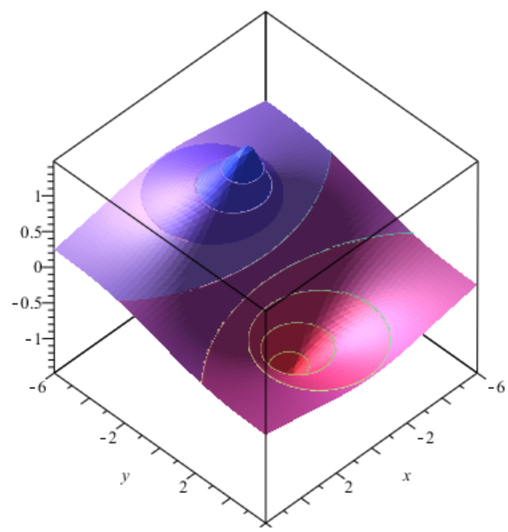
$$z = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^{۲} + (y + ۳)^{۲} = ۸$$

$$z = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^{۲} + (y - ۳)^{۲} = ۸$$









□

مثال ۶۲. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

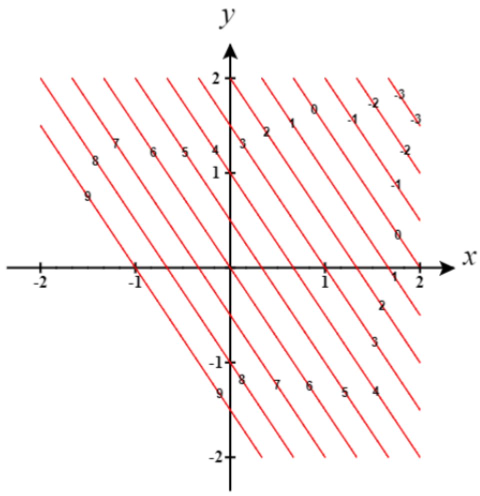
$$f(x,y) = ۶ - ۳x - ۲y$$

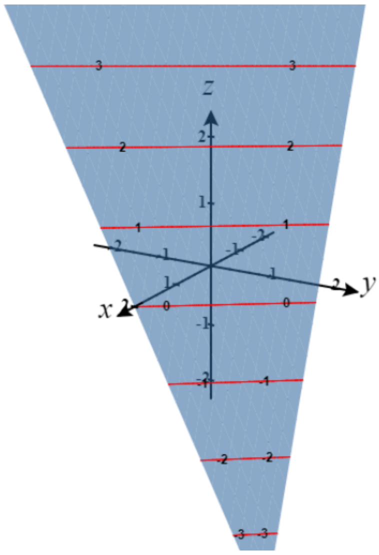
پاسخ.

$$z = ۱ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۵$$

$$z = ۲ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۴$$

$$z = ۳ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۳$$


y
x


z
x
y

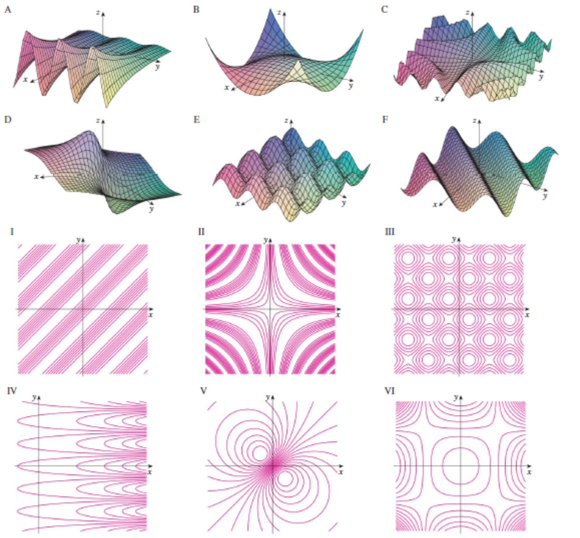
□

تمرین زیر از کتاب استوارت است. معادله‌ها را به رویه‌ها و رویه‌ها را به منحنی‌های تراز آنها وصل کنید:

$z = \sin(xy)$ $\qquad$ $z = e^x \cos y$

$z = \sin(x - y)$ $\qquad$ $z = \sin x - \sin y$

$z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ $\qquad$ $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$



۶ نیم‌جلسه‌ی ششم، چهارشنبه

۱.۶ پاسخ سوال

سوال ۶۳ (سوال دانشجویان)**.** معادله‌ی $z = y + x^۲$ را چگونه رسم کنیم؟ این معادله جزو معادله‌هائی که دسته‌بندی کرده‌ایم نیست.

معادله‌ی بالا به ظاهر جزو معادله‌های دسته‌بندی شده نیست، اما در حقیقت معادله‌ی یک استوانه است که دوران یافته است. پیش از آنکه این سوال را پاسخ گوئیم، بیائید یک مشاهده درباره‌ی معادله‌ی $z = x^۲ + y^۲$ داشته باشیم (که از آن مشاهده برای رسم معادله‌ی $z = y + x^۲$ استفاده خواهیم کرد).

مشاهده ۶۴.

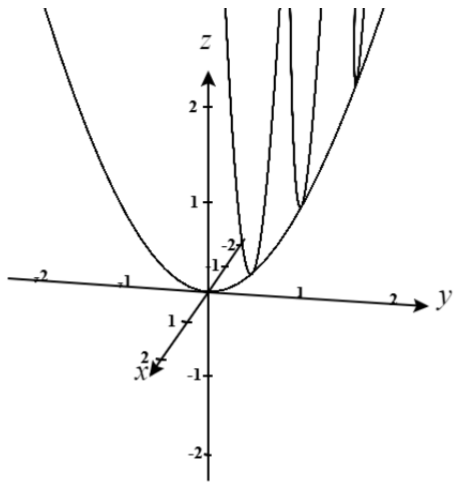
$$z = x^۲ + y^۲$$

تصاویر ایجاد شده روی صفحاتِ $y = k$ در نظر بگیرید:

$$y = \frac{۱}{۲} \Rightarrow z = x^۲ + \frac{۱}{۴}$$

$$y = ۱ \Rightarrow z = x^۲ + ۱$$

$$y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow z = x^۲ + \frac{۹}{۴}$$



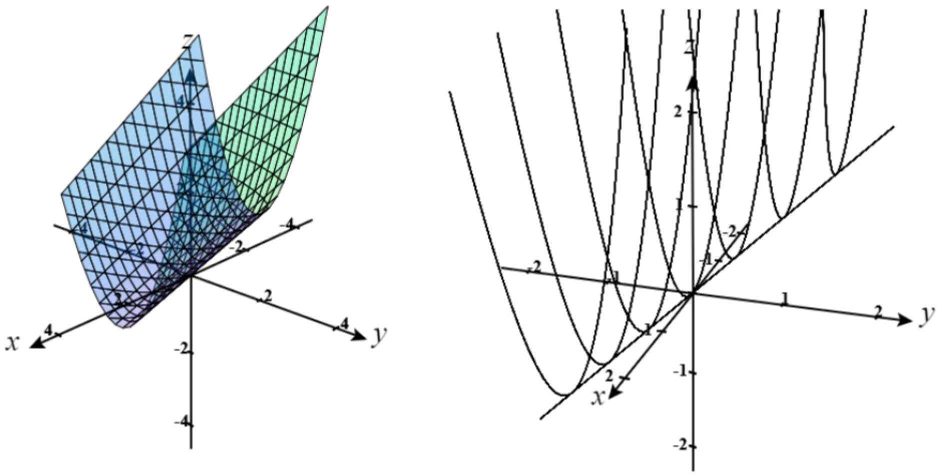
در واقع اگر همزمان تصاویر ایجاد شده روی همه‌ی صفحاتِ $y = k$ را رسم کنیم به شکل مورد نظر می‌رسیم. روی صفحه‌ی $y = k$ منحنیِ $z = k^۲ + x^۲$ ایجاد می‌شود. برای رسم این منحنی، کافی است روی صفحه‌ی $y = k$ به اندازه‌ی $k^۲$ با شروع از نقطه‌ی $(۰, k)$ به سمت محور z بالا برویم و از آنجا، منحنیِ $z = x^۲$ را رسم کنیم (یعنی پائین ترین نقطه‌ی سهمی، نقطه‌ی $z = k^۲$ باشد). برای به اندازه‌ی $k^۲$ بالا رفتن روی صفحه‌ی $y = k$ کافی است نقطه‌ی اشتراک این صفحه را با منحنی $z = x^۲$ (در صفحه‌ی zx) در نظر بگیریم.

حال سوال مورد نظر را پاسخ می‌گوئیم:

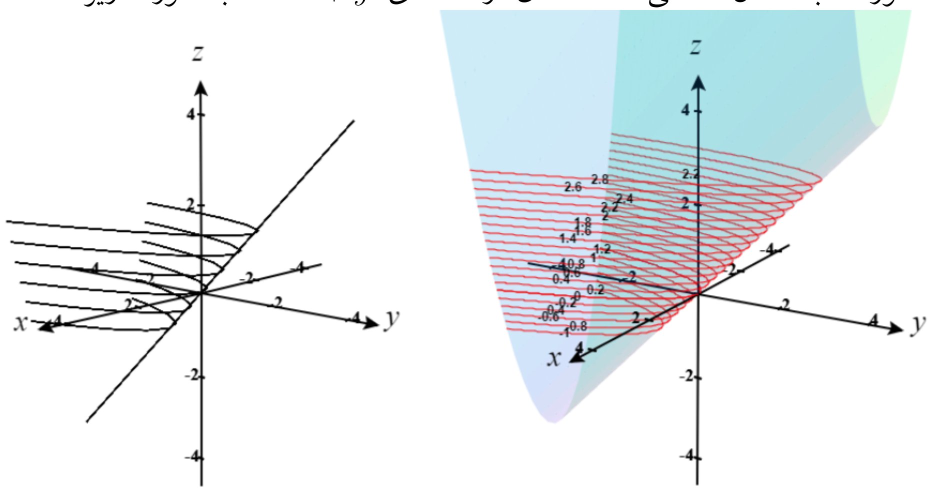
مثال ۶۵. رویه‌ی $z = y + x^۲$ را رسم کنید.

این شکل (با توضیحی مشابه بالا) از کشیدنِ سهمی‌های $z = x^۲$ روی خطِ $y = z$ ایجاد می‌شود. پس یک استوانه‌ی موازیِ خطِ $x = ۰$, $z = y$ است.

پاسخ.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $z = x + y^۲$ به صورت زیر است:



□

۲.۶ ادامه‌ی مبحث منحنی‌های تراز

مثال ۶۶. منحنی‌های تراز تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱. $h(x,y) = ۴x^۲ + y^۲ + ۱$

پاسخ.

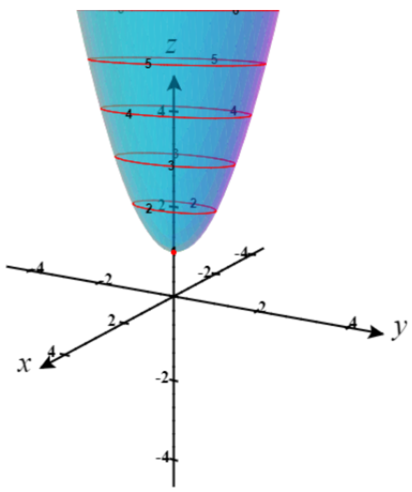
$$z = ۴x^۲ + y^۲ + ۱$$

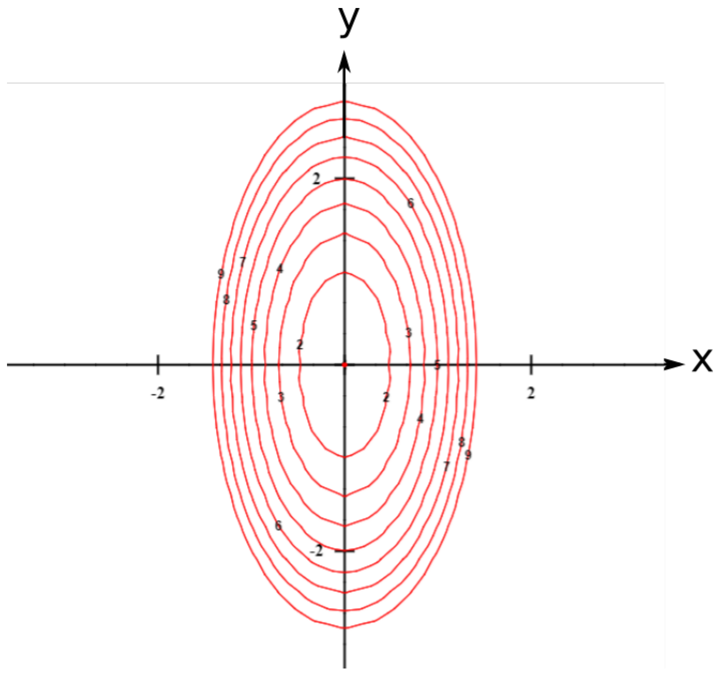
در $z < ۱$ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = ۱ \Rightarrow (x,y) = (۰,۰)$$

$$z = ۲ \Rightarrow ۴x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۱}{۴}} + y^۲ = ۱$$

$$z = ۵ \Rightarrow ۴x^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + \frac{y^۲}{۴} = ۱$$





توجه ۶۷. در معادله‌ی بالا، در صفحه‌ی $x = ۰$ سهمی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = ۰ \\ z = f(y) = y^۲ + ۱ \end{cases}$$

نقطه‌ی $(۰, ۰, ۱)$ یک مینی‌موم نسبی برای سهمی یادشده است. پس در این نقطه داریم $f'(y) = ۰$. این نکته را در بخش مشتقهای جزئی مفصلاً بررسی خواهیم کرد.

□

۲. $z = xy$

پاسخ.

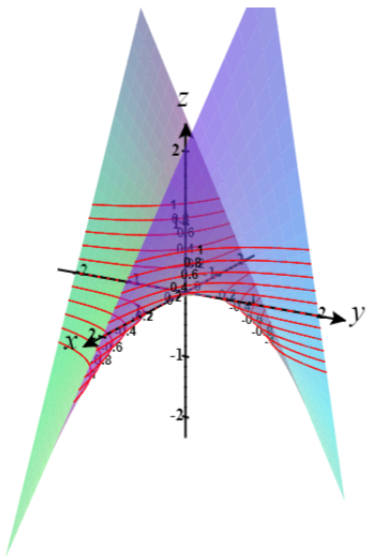
$$z = ۰ \Rightarrow xy = ۰$$

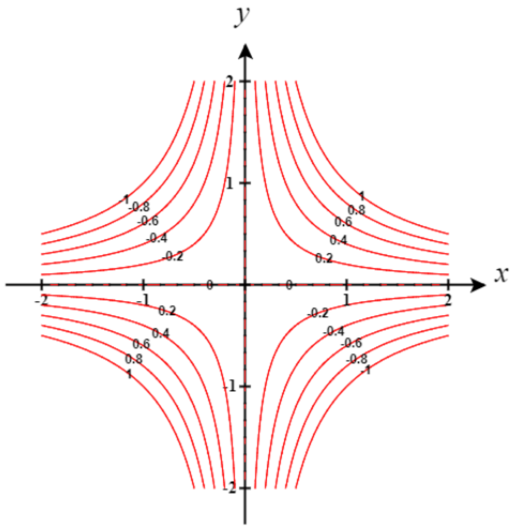
پس در $z = ۰$ داریم: $x = ۰$ یا $y = ۰$.

$$z = ۱ \Rightarrow xy = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{x}$$

$$z = -۱ \Rightarrow xy = -۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{x}$$

$$z = ۲ \Rightarrow xy = ۲ \Rightarrow y = \frac{۲}{x}$$





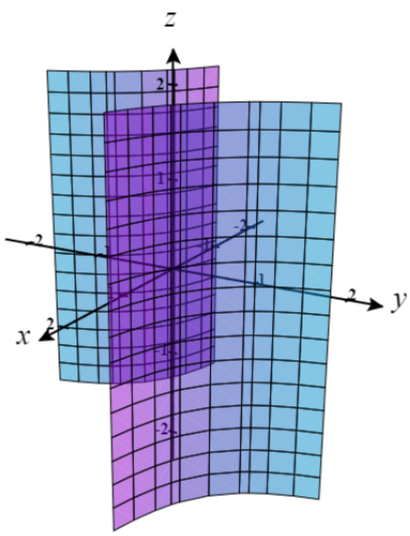
□

۳.۶ پاسخ سوال

دو رویه‌ی $z = xy$ و $xy = ۱$ را رسم کنید.

سوال ۶۸. رویه‌ی $xy = ۱$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که معادله‌ی بالا، به z بستگی ندارد. پس یک استوانه است موازی محور z، که سطح مقطع آن منحنیِ $y = \frac{۱}{x}$ است.



□

سوال ۶۹. رویه‌ی $z = xy$ را رسم کنید.

پاسخ. (همان طور که در دوره‌ی دبیرستان آموخته‌اید) اگر محورهای x و y را بطور همزمان به اندازه‌ی θ دوران دهیم (یعنی صفحه‌ی xy را به اندازه‌ی θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم): داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y')$$

$$z = xy \Rightarrow z = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y') \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y') = \frac{۱}{۲}(x'^{۲} - y'^{۲})$$

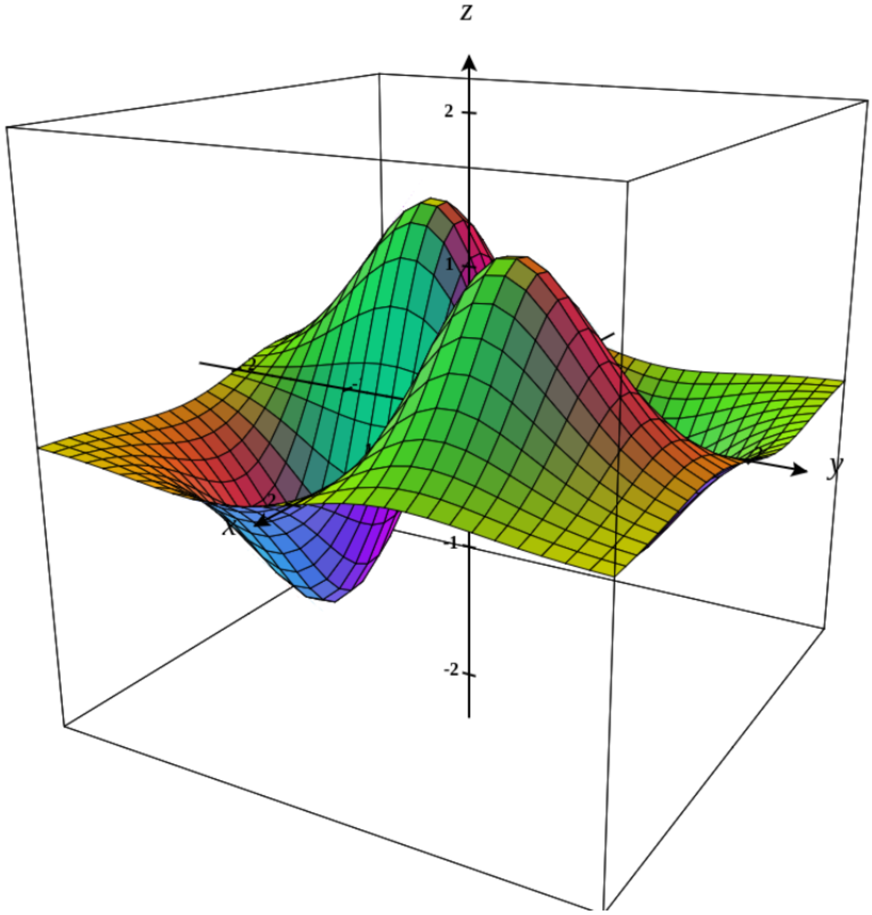
پس معادله‌ی جدید به صورت زیر است:

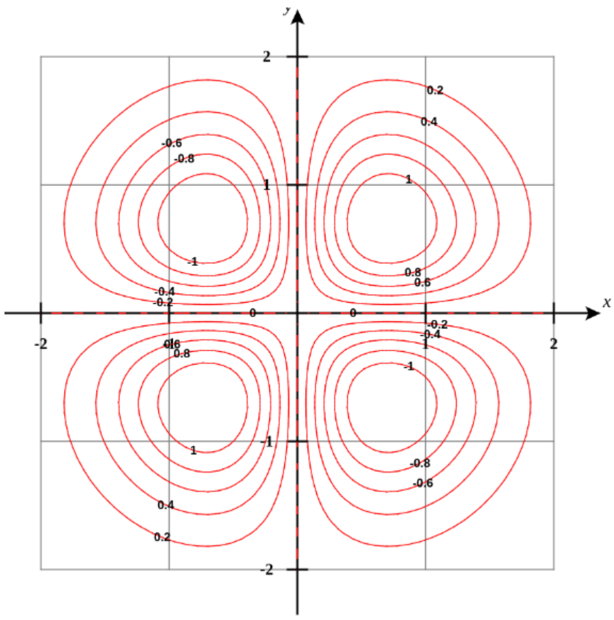
$$z = \frac{۱}{۲}(x'^{۲} - y'^{۲})$$

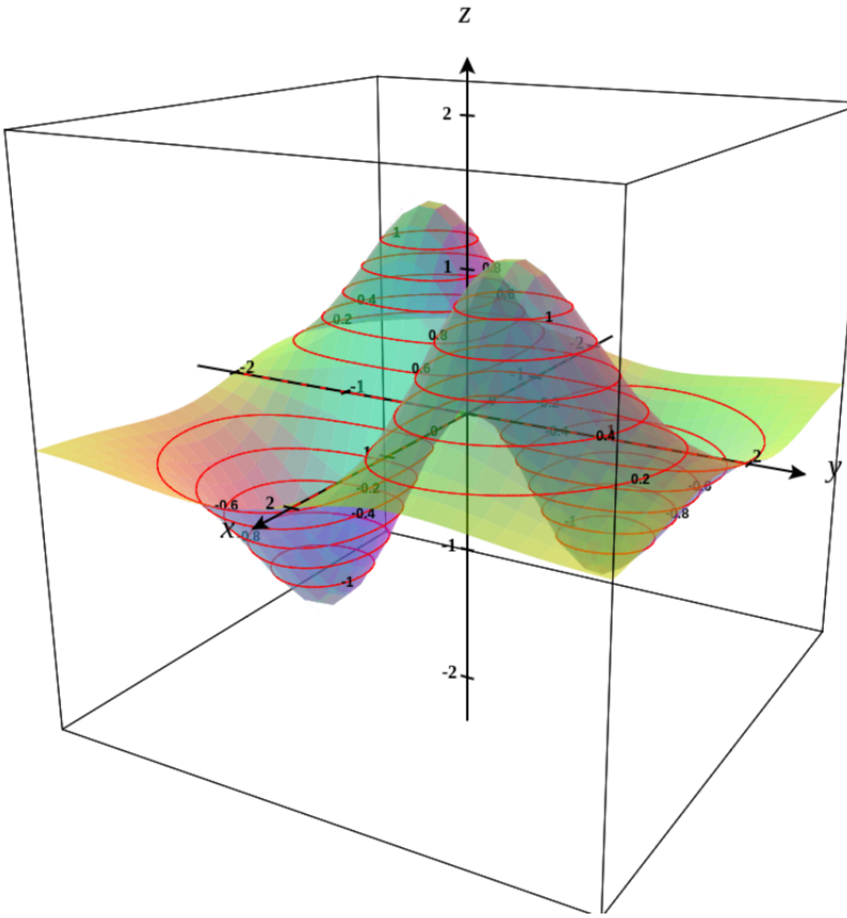
پس شکل بالا از دورانِ سهمی‌وار هذلولویِ $z = x^{۲} - y^{۲}$ به اندازه‌ی ۴۵ درجه روی صفحه‌ی xy به دست می‌آید (تصویر مورد نظر را در مثال منحنی‌های تراز در بالا کشیده‌ایم). □

سوال ۷۰. منحنی‌های تراز توابع زیر را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید:

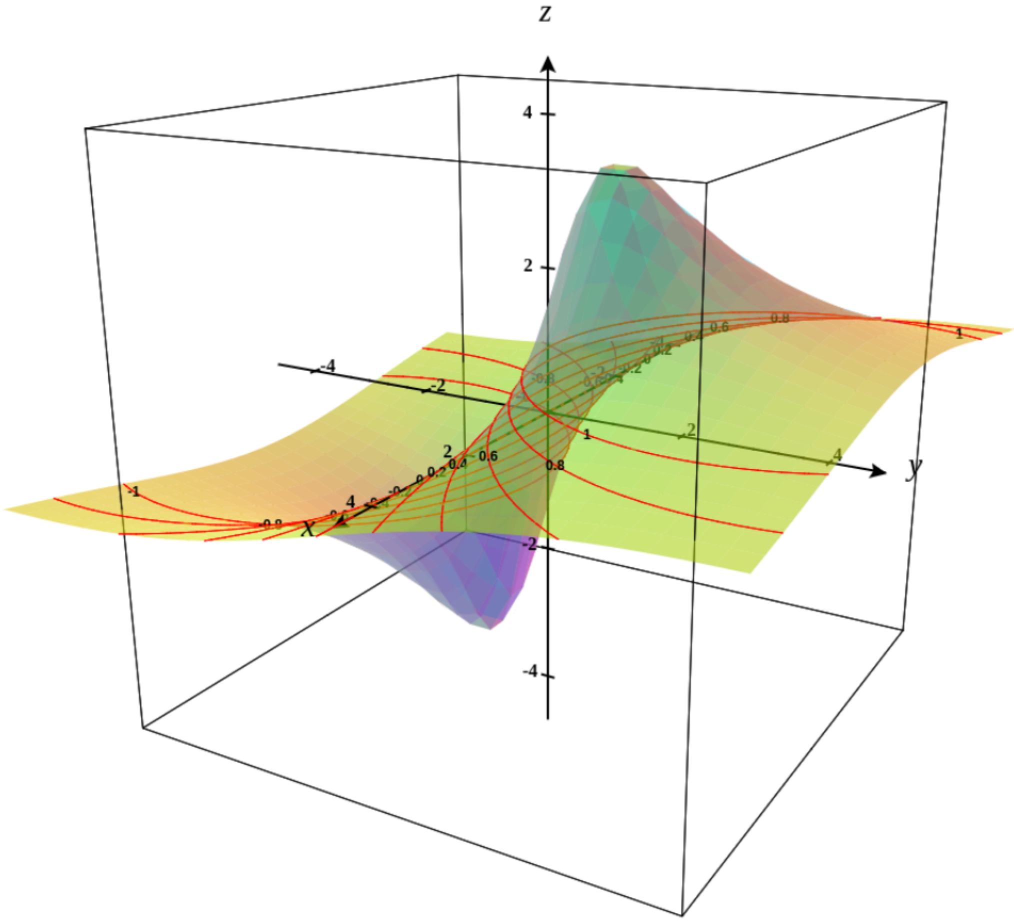
۱. $f(x, y) = \frac{۷xy}{e^{x^{۲}+y^{۲}}}$

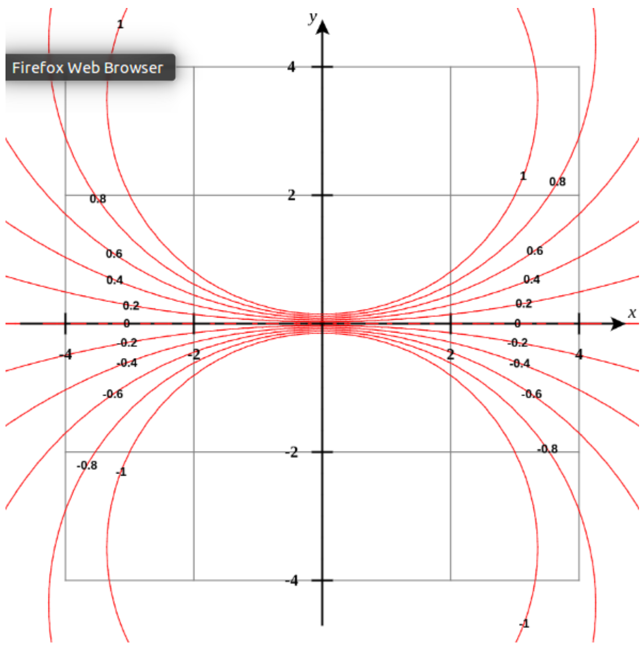






۲. $f(x,y) = \frac{۷y}{x^{۲}+y^{۲}+۱}$





۴.۶ تمرین

تمرین ۸. منحنی‌های تراز توابع زیر را رسم کنید:

- $f(x,y) = \ln(x^{۲} + y^{۲})$
- $f(x,y) = \frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}$

۵.۶ حد و پیوستگی

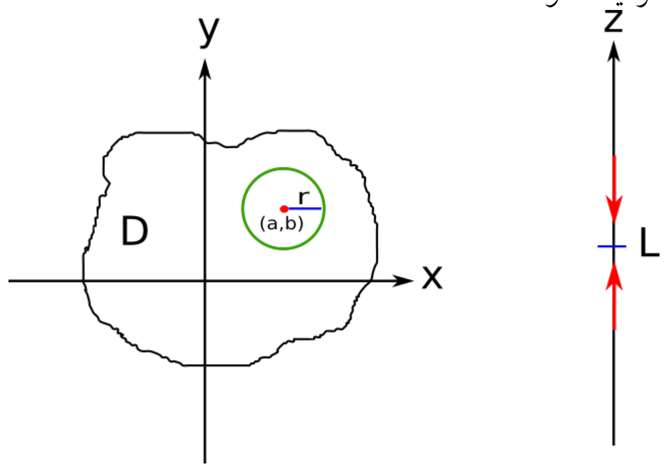
فرض کنید

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

یک تابع باشد. می‌گوئیم

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x,y) = L$$

هرگاه مقادیر $f(x,y)$ را بتوان به **هر اندازه‌ی دلخواه** به L نزدیک کرد، به شرط آنکه (x,y) **به اندازه‌ی کافی** به (a,b) نزدیک شود.



$$\lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)} f(x,y) = L \iff$$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Big(\forall x, y \quad$ (فاصله‌ی (x,y) از (a,b) کمتر از δ باشد $\rightarrow$ فاصله‌ی z از L کمتر از ϵ شود) $\Big)$

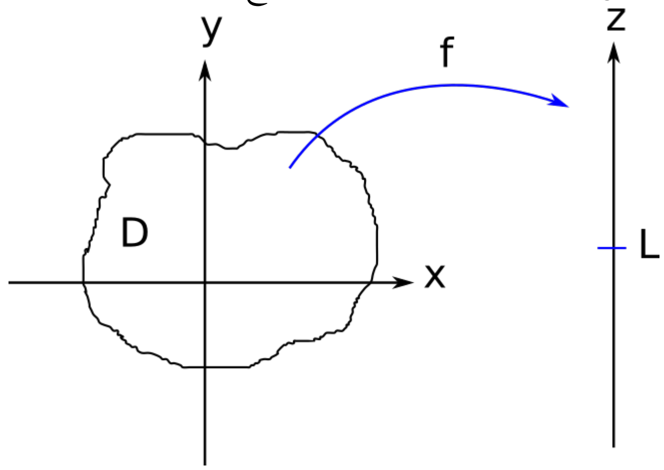
$$\iff \forall \epsilon \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \quad \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon\right)$$

این مطلب را در جلسه‌ی آینده دوباره توضیح خواهیم داد.

۷ جلسه‌ی هفتم، شنبه

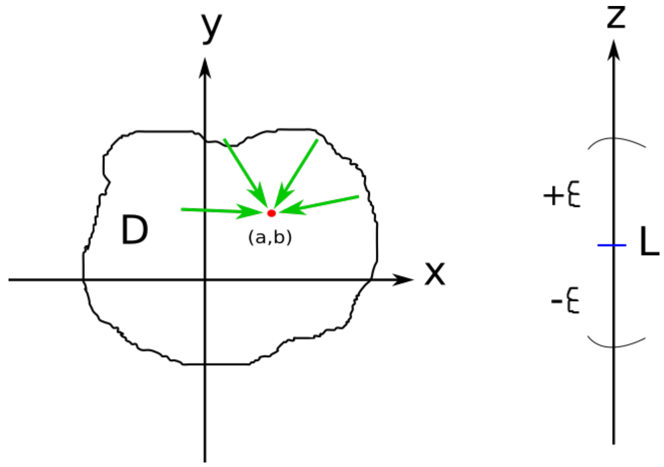
۱.۷ ادامه‌ی حد و پیوستگی

فرض کنید که $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع باشد،



می‌گوییم حدّ تابع f وقتی (x,y) به (a,b) میل می‌کند برابر است با L هرگاه مقادیر $f(x,y)$ به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک شوند، به شرطی که (x,y) به اندازه‌ی کافی به (a,b) نزدیک شده باشد:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \left(\forall \overset{(x,y) \text{ یا}}{x, y} \quad \left(\text{اگر فاصله‌ی } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ کمتر از } \delta(\epsilon) \text{ باشد} \to |f(x,y) - L| < \epsilon \right) \right)$$

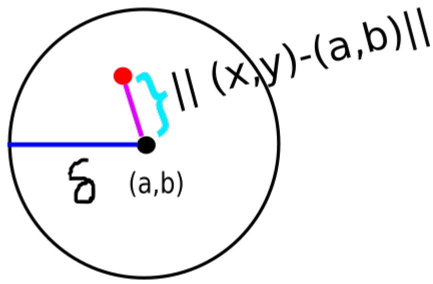


توجه ۷۱. وقتی می‌گوییم (x,y) به اندازه‌ی δ به (a,b) نزدیک است و می‌نویسیم:

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta$$

یعنی

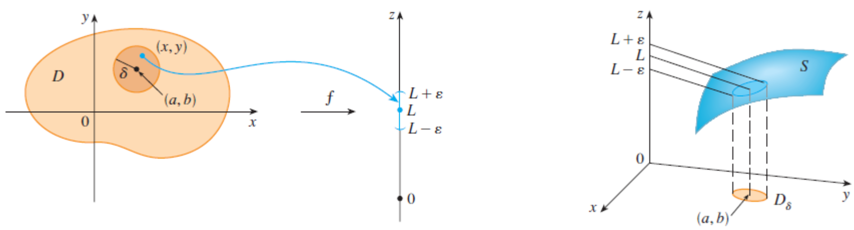
$$\sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} < \delta$$



پس تعریف حد در بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$
$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x,y) \in D(f) \quad \left(۰ < \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} < \delta(\epsilon) \to |f(x,y) - L| < \epsilon\right)$$

در واقع وقتی که نقاطِ (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک می‌شوند (یعنی در داخل دوایر با شعاع کم قرار می‌گیرند) مقادیر تابع به L نزدیک می‌شود (یعنی داخل بازه‌های کوچک به مرکز L قرار می‌گیرند). تصویر زیر از کتاب استوارت گرفته شده است:

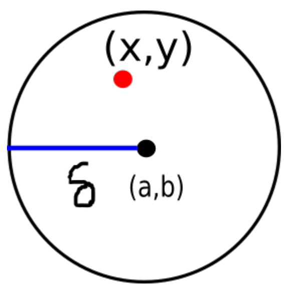


تمرین ۹. نشان دهید که

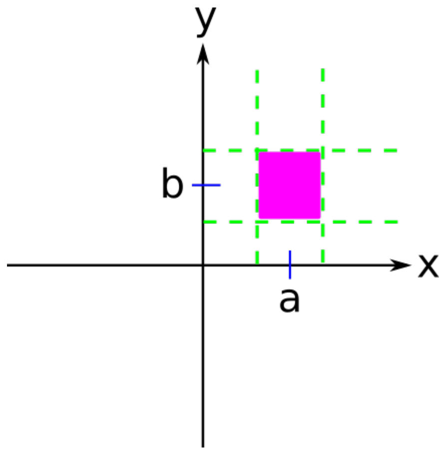
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff$$
$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x,y) \quad \Big((۰ < |x-a| < \delta) \wedge (۰ < |y-b| < \delta) \to |f(x,y) - L| < \epsilon\Big)$$

توجه کنید که تمرین بالا در واقع می‌گوید که می‌توان به جای دیسکهای با شعاع کمتر و کمتر در مستطیلهای با طول و عرض کوچکتر و کوچکتر به نقطه‌ی (a,b) نزدیک شد:

$$\sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} < \delta :$$

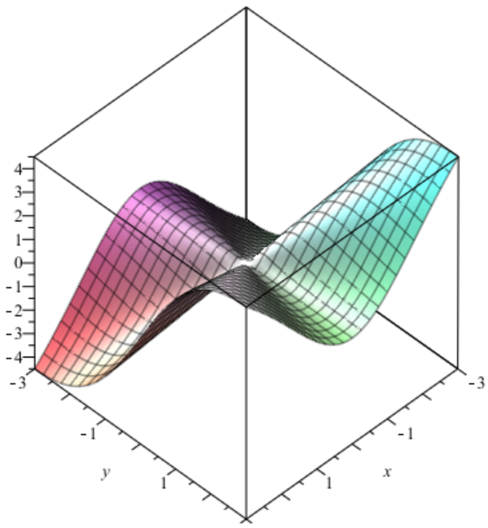


$$\begin{cases} |x-a| < \delta \\ |y-b| < \delta \end{cases} :$$



مثال ۷۲. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲} = ۰$$



پاسخ. فرض کنید $\epsilon > ۰$ را داشته باشیم، به دنبال δ هستیم به طوری که اگر $۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$، آنگاه $|\frac{۳x^۲y}{x^۲+y^۲}| < \epsilon$

چرک‌نویس.

$$\frac{|۳x^۲y|}{x^۲+y^۲} = \frac{۳x^۲\sqrt{y^۲}}{x^۲+y^۲}$$

می‌دانیم که

$$x^۲ \leqslant x^۲+y^۲$$

و

$$\sqrt{y^۲} \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲}$$

پس داریم:

$$\frac{۳x^۲\sqrt{y^۲}}{x^۲+y^۲} \leqslant \frac{۳\cancel{(x^۲+y^۲)}\sqrt{x^۲+y^۲}}{\cancel{x^۲+y^۲}} = ۳\sqrt{x^۲+y^۲} \quad *$$

کافی است که δ یک عدد مثبت دلخواه باشد به طوری که $\delta < \frac{\epsilon}{۳}$. آنگاه اگر $۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$ آنگاه

$$\frac{|۳x^۲y|}{x^۲+y^۲} < ۳\sqrt{x^۲+y^۲} \leqslant ۳\delta < ۳ \times \frac{\epsilon}{۳} = \epsilon$$

□

مثال ۷۳. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

پاسخ. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد.

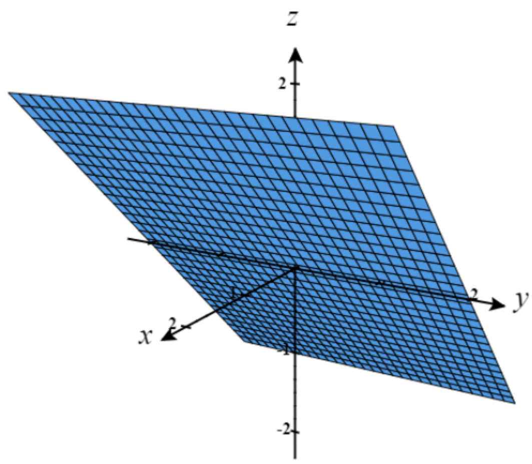
چرک‌نویس.

$$|f(x,y)-a| = |x-a|$$

$$|x-a| = \sqrt{|x-a|^۲} \leqslant \sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}$$

کافی است δ را یک عدد مثبت بگیریم به طوری که $\delta < \epsilon$. در این صورت اگر $۰ < \sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲} < \delta$ آنگاه

$$|x-a| \leqslant \sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲} < \delta < \epsilon$$



در زیر تابعِ $z = x$ را رسم کرده‌ایم.

□

بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

و

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k$$

که در بالا k یک عدد ثابت است.

قضیه ۷۴. فرض کنید $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ آنگاه: (فرض کرده‌ایم که دامنه‌ی f و g در یک دیسک به مرکز (a,b) مشترک باشند.)

۱. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$

۲. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \times g(x,y) = L \times M$

۳. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} k \times f(x,y) = k \times L$

۴. اگر $M \neq ۰$ آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

۵. در صورتی که $L^{\frac{m}{n}}$ موجود باشد (یعنی یک عدد حقیقی باشد)، آنگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(f(x,y)\Big)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$$

از ترکیب قضیه‌ی بالا با مثالهای قبل (درباره‌ی تابعهای ثابت، $z = x, z = y$) به این نتیجه می‌رسیم که توابع چند جمله‌ای دارای حد هستند. منظور از یک تابع چندجمله‌ای، تابعی است که از جمع تعدادی متناهی عبارت به صورتِ ax^my^n ایجاد شده است، مانندِ $۱۰ + x^۷ + ۵xy^۳$. همچنین توابع گویا در دامنه‌شان دارای حد هستند. منظور از یک تابع گویا، تابعی است که آن را به صورت خارج‌قسمت دو تابع چندجمله‌ای می‌توان نوشت.

مثال ۷۵. مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

۱. $\lim_{(x,y)\to(۰,-۱)} \frac{x-xy+۳}{x^۲+۵xy-y^۳}$

پاسخ.

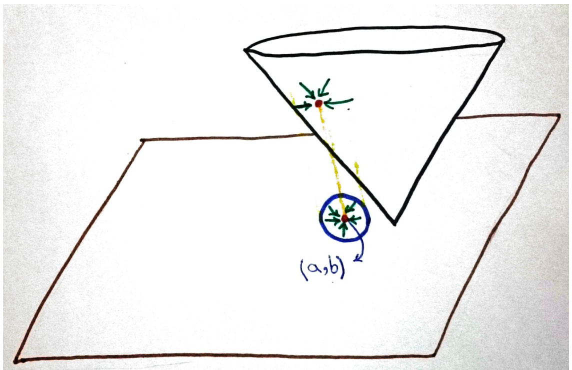
$$\lim_{(x,y)\to(۰,-۱)} \frac{x-xy+۳}{x^۲+۵xy-y^۳} = \frac{۳}{۱}$$

□

۲. $\lim_{(x,y)\to(۳,۴)} \sqrt{x^۲+y^۲}$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y)\to(۳,۴)} \sqrt{x^۲+y^۲} = ۵$$



(۷)

□

۳. $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

پاسخ.

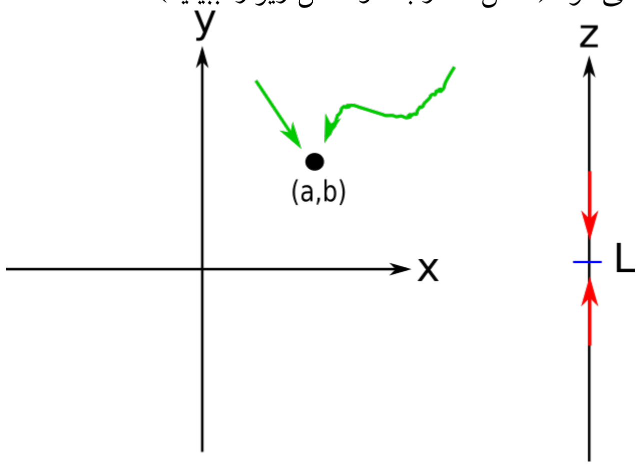
$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} x(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = ۰$$

□

توجه ۷۶. تعریف وجود حد برای یک تابع ایجاب می کند که هرگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

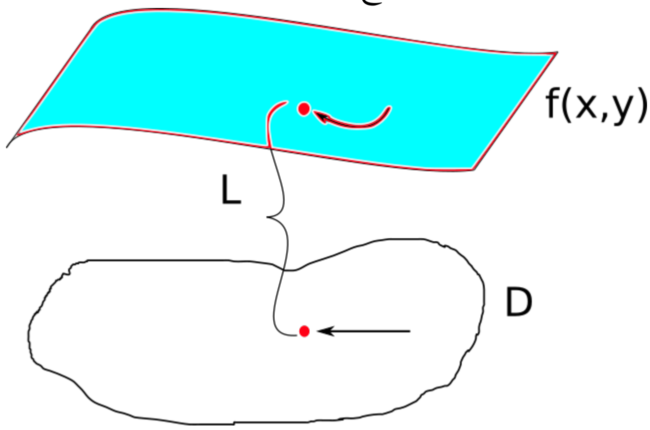
آنگاه از هر مسیری که زوج مرتبهای (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک شوند، مقادیرِ $f(x,y)$ روی آن مسیر به L نزدیک می‌شود (شکل ۷ در بالا و شکل زیر را ببینید).



نتیجه ۷۷. اگر با میل کردن (x,y) به (a,b) در دو مسیر متفاوت به حد متفاوت برسیم، تابع مورد نظر ما حد ندارد.

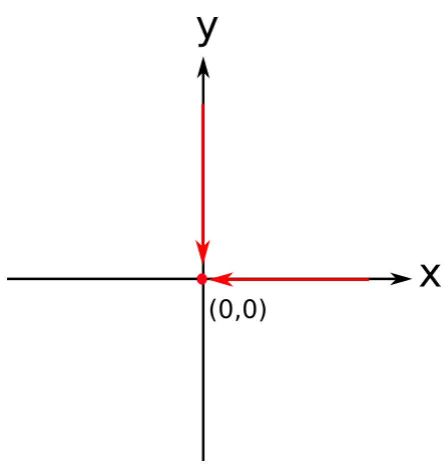
۸ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

توجه ۷۸. شرط لازم برای وجود حد تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) این است که از هر مسیری (در دامنه‌ی تابع) که (x,y) به (a,b) نزدیک شود، تابع حد یکسانی داشته باشد.



به بیان دیگر اگر دو مسیر به سمت (a,b) پیدا شوند که تابع روی آندو حدهای مختلف داشته باشد، آنگاه حد تابع موجود نیست.

مثال ۷۹. نشان دهید که تابع $\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ در هر نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد.



پاسخ.

$$f(x,y)=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$$

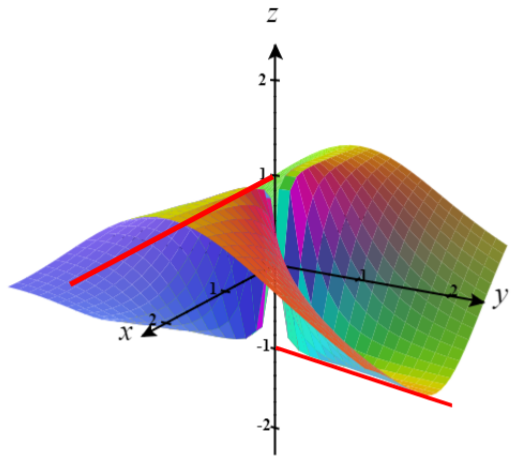
اگر روی نقاط $(x,۰)$ یعنی روی خط $y=۰$ ، نقطه‌ی (x,y) را به $(۰,۰)$ میل دهیم، داریم:

$$f(x,۰)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x,۰)=۱$$

اگر روی نقاط $(۰,y)$ یعنی روی خط $x=۰$ ، نقطه‌ی (x,y) به $(۰,۰)$ میل کند، داریم:

$$f(۰,y)=-۱$$



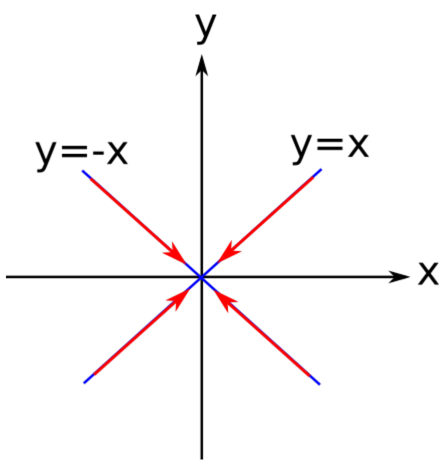
از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f حد ندارد (تصویر بالا را ببینید) $\square$

مثال ۸۰. نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{xy}{x^۲+y^۲}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$y=x \Rightarrow \frac{x^۲}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y=-x \Rightarrow \frac{-x^۲}{۲x^۲}=-\frac{۱}{۲}$$



از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f در $(۰,۰)$ حد ندارد. $\square$

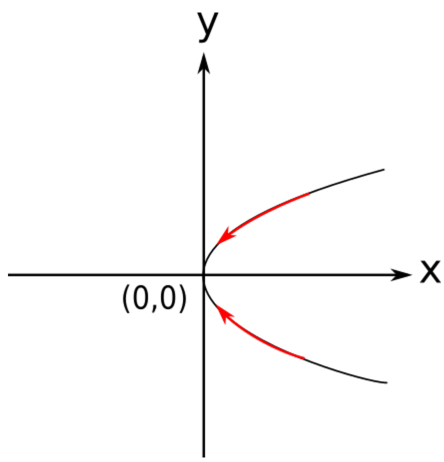
مثال ۸۱. نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{xy^۲}{x^۲+y^۴}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$x=y^۲ \Rightarrow f(y^۲,y)=\frac{y^۴}{۲y^۴}=\frac{۱}{۲}$$

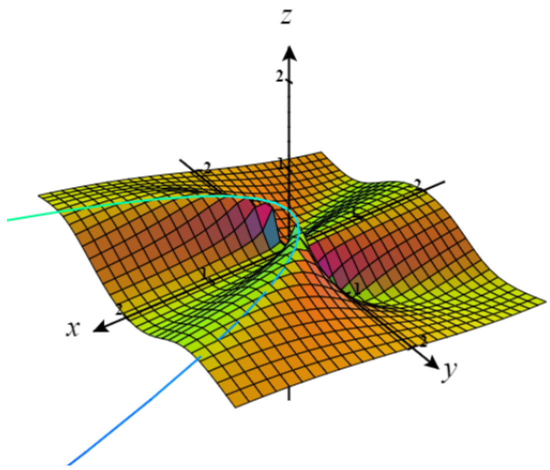
$$x=ky^۲ \Rightarrow f(ky^۲,y)=\frac{k}{۲}$$

از آنجا که حد، به مقدار k بستگی دارد، روی مسیرهای متفاوتِ $x=ky^۲$ در صفحه‌ی xy به حدود متفاوتی می‌رسیم.



مسیر زیر را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم.

$$y = ۰ \Rightarrow f(x, ۰) = ۰$$



$\square$

۱.۸ پیوستگی

تعریف ۸۲. تابع $f(x,y)$ را در نقطه‌ی (a,b) **پیوسته** می‌خوانیم هرگاه

۱. نقطه‌ی (a,b) در دامنه‌ی تابع باشد،

۲. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد، و

۳. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

تابع f را پیوسته می‌خوانیم هرگاه در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

ترکیبات جبری توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

$$f \pm g, f.g, \frac{f}{g} \quad g(a,b) \neq ۰, f^{\frac{m}{n}}$$

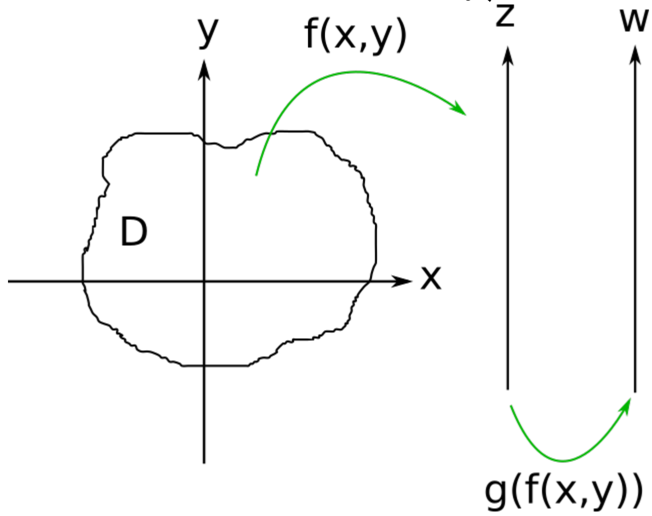
پیش‌تر گفتیم که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

پس $z=x$ تابعی پیوسته است. پس توابعِ $z=kx^n$ نیز پیوسته‌اند. به طور مشابه توابعِ $z=ky^n$ پیوسته‌اند و در نتیجه توابع $z=kx^ny^m$ پیوسته‌اند. از آنجا که حاصلجمع توابع پیوسته، پیوسته است، توابع چندجمله‌ای پیوسته‌اند.

همچنین توابع توابع گویا، یعنی خارج‌قسمتهای دو چندجمله‌ای، (در دامنه‌شان)پیوسته‌اند.

اگر $w=g(z)$ (تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$) پیوسته باشد و $z=f(x,y)$ (تابعی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}$) هم پیوسته باشد، آنگاه $g(f(x,y))$ (از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}$) پیوسته است.



مثال ۸۳. توابع زیر در $\mathbf{R}^۲$ پیوسته‌اند.

$$\ln(۱+x^۲y^۲), \cos\frac{xy}{x^۲+۱}, e^{x-y}$$

مثال ۸۴. تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

پاسخ. دامنه‌ی تابع کُلِّ $\mathbf{R}^۲$ است. در نقاط $(x,y)\neq(۰,۰)$ تابع گویا است، پس پیوسته است. در مسیرهای $y=mx$ به $(۰,۰)$ نزدیک می‌شویم:

$$f(x,mx)=\frac{۲mx^۲}{x^۲+m^۲x^۲}=\frac{۲mx^۲}{x^۲(۱+m^۲)}=\frac{۲m}{۱+m^۲}$$

مشاهده ۸۵. وقتی در مسیرهای یاد شده به نقطه‌ی $(۰,۰)$ نزدیک می‌شویم با تغییر شیب، حد تابع عوض می‌شود. در واقع اگر $m=\tan\theta$ حد تابع برابر است با

$$\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta}=\frac{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{۱}{\cos^۲\theta}}=۲\cos\theta\sin\theta=\sin ۲\theta$$

یعنی حد تابع روی این مسیرها، مقادیر مختلفی در بازه‌ی $(۰,۱)$ اتخاذ می‌کند.

پس تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ ناپیوسته است. □

تمرین ۱۰. نشان دهید که تابع $f(x,y)=\frac{۲x^۲y}{x^۴+y^۲}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد ندارد. (راهنمایی: در مسیرهای $y=kx^۲$ حد تابع را بررسی کنید.)

تمرین ۱۱. تابع $h(x,y)=\arctan(\frac{y}{x})$ در چه نقاطی پیوسته است.

۲.۸ توابع با بیش از دو متغیر

منظور از یک تابع سه متغیره ضابطه‌ای است مانند:

$$f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

که هر (x, y, z) متعلق به یک مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^۳$ را به یک عنصر $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ می‌برد. مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابعِ f می‌خوانیم.

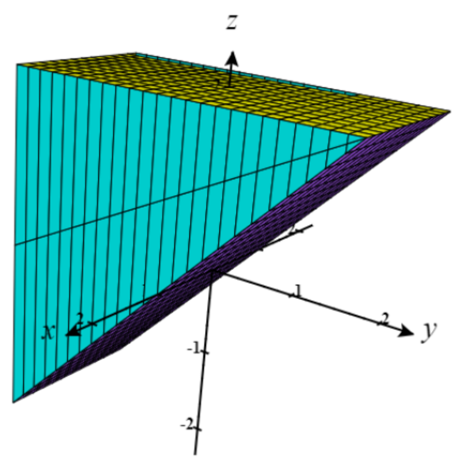
مثال ۸۶. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin(z)$$

پاسخ.

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ | z > y\}$$

نیم‌فضای بالای صفحه‌ی: $z = y$



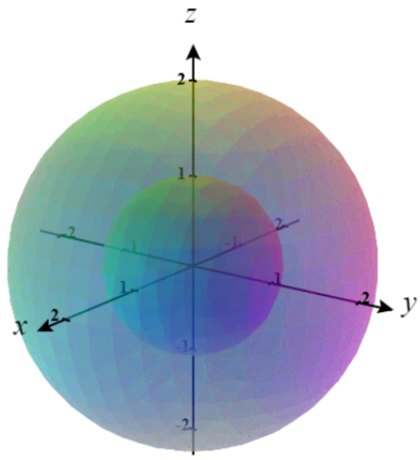
□

مثال ۸۷. رویه‌های تراز تابع $f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ را رسم کنید.

پاسخ. هر رویه‌ی ترازِ تابع یادشده، یک کُره است:

$$k = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$$

$$k = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$$



$\square$

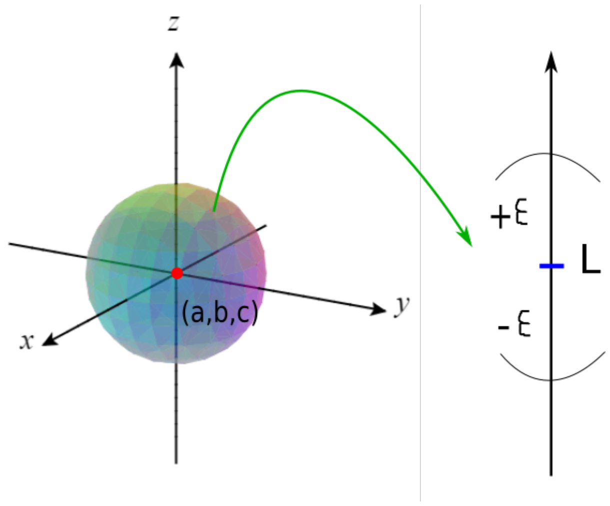
توجه کنید که رسم یک تابعِ از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}$ ممکن نیست. عموماً دامنه‌ی چنین تابعی را در $\mathbb{R}^۳$ و بُرد آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم.

تعریف ۸۸. فرض کنید f یک تابع سه متغیره باشد.

$$f : D \subseteq \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

منظور از $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$ این است که:

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall (x,y,z) \quad \Big(۰ < \underbrace{\sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲ + (z-c)^۲} < \delta}_{\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } (x,y,z) \text{ از } (a,b,c) \text{ کمتر از } \delta \text{ شود}} \to |f(x,y,z) - L| < \epsilon \Big)$$



مفهوم پیوستگی برای توابع سه متغیره، بطور مشابه تعریف می‌شود. چنین تابعی را در نقطه‌ی (a,b,c) پیوسته می‌خوانیم هرگاه $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$. به عنوان مثال توابع زیر پیوسته‌اند:

$$\ln(x,y,z), \frac{y \sin z}{x - ۱} \quad (x \neq ۱)$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,-۱)} \frac{e^{x+z}}{z^۲ + \cos\sqrt{xy}} = \frac{۱}{۲}$$

$\square$

تمرین ۱۲. فرض کنید $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$، یک تابع باشد. با الگوگیری از تعاریف حد برای توابع دو و سه متغیره، عبارتِ

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1,\ldots,x_n)=L$$

را تعریف کنید.

پاسخ.

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1,\ldots,x_n)=L \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta(\epsilon)>0 \quad \forall(x_1,\ldots,x_n)\in D(f)\\ &\Big(0<\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<\delta \to |f(x_1,\ldots,x_n)-L|<\epsilon\Big)\end{aligned}$$

□

مثال ۸۹. حد تابع زیر را بیابید.

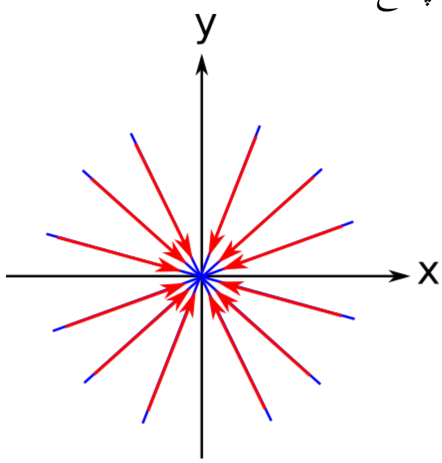
$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}$$

۹ نیم جلسه‌ی نهم، چهارشنبه

حل چند تمرین

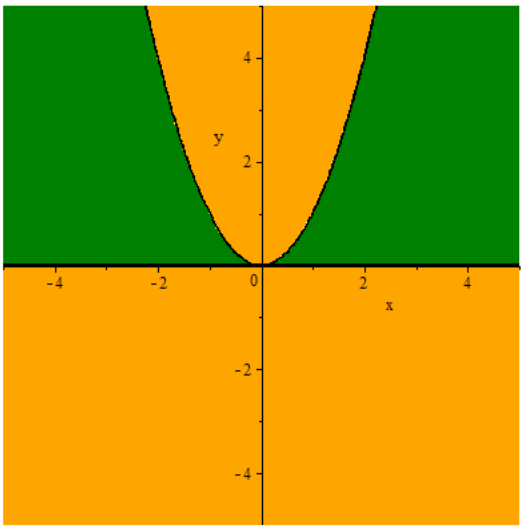
سوال ۹۰ (سوال دانشجویان)**.** فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در تمام مسیرهای $y=mx$ دارای حدِ برابرِ L باشد. آیا لزوماً حد تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ برابر با L است ($\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=L$)؟

پاسخ.



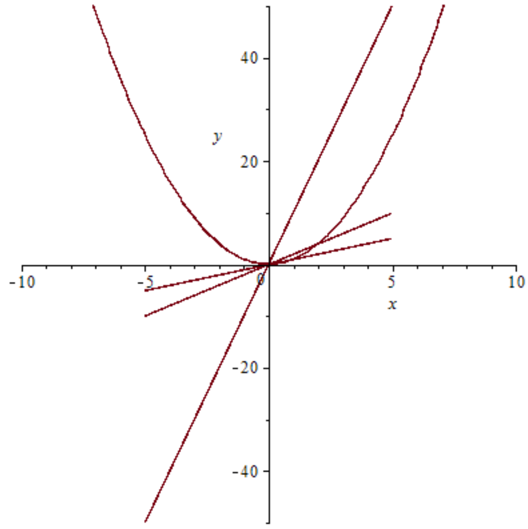
تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۰ & y\leqslant ۰ \text{ یا } y\geqslant x^۲ \\ ۱ & ۰<y<x^۲ \end{cases}$$



ادعا می‌کنیم که روی تمام مسیرهای $y=mx$ در صفحه‌ی xy حد تابع در $(۰,۰)$ برابر با ۰ است.

یک خط دلخواهِ $y=mx$ را در نظر بگیرید (فرض کنیم $m>۰$). اگر $۰<x<m$ آنگاه $x^۲<mx$. یعنی منحنیِ $y=mx$ در بازه‌ی $x\in(۰,m)$ بالاتر از منحنیِ $y=x^۲$ قرار می‌گیرد. پس مقدار تابع مورد نظر ما روی این منحنی برابر با ۰ است. پس حد تابع نیز روی این منحنی برابر با صفر است. برای x های کمتر از صفر نیز از آنجا که $y=mx<۰$ دوباره مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز صفر است. (منحنی‌های $y=mx$ را در حالتی که $m<۰$ شما بررسی کنید).



حال ادعا می‌کنیم که حد تابع بالا در $(۰,۰)$ برابر با صفر نیست. می‌دانیم که

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰ \iff$$
$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists\delta(\epsilon) > ۰ \quad \forall(x,y) \quad \left(۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |f(x,y)| < \epsilon\right)$$

پس

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) \neq ۰ \iff$$
$$\exists \epsilon > ۰ \quad \forall\delta > ۰ \quad \exists(x,y) \quad \left(۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \wedge |f(x,y)| \geqslant \epsilon\right)$$

قرار دهید $\epsilon = \frac{۱}{۲}$. برای هر $\delta > ۰$ نقطه‌ای مانند (x,y) در دایره‌ی به شعاع δ و مرکزِ $(۰,۰)$ پیدا می‌شود که در آن $f(x,y) = ۱ > \frac{۱}{۲}$. □

تمرین ۱۳. نمودار تابع بالا را رسم کنید.

تمرین ۱۴. نقاطی را که تابع زیر در آنها پیوسته است، مشخص کنید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y^۳}{۲x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۱ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

پاسخ. از آنجا که توابع گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند، تابع مورد نظر در $(x,y) \neq (۰,۰)$ پیوسته است. حال باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۱?$$

اگر قرار باشد حد بالا برقرار باشد، روی همه‌ی مسیرها به سمت $(۰,۰)$ تابع باید به ۱ میل کند. روی مسیر $y = mx$ داریم:

$$f(x,mx) = \frac{x^۲(mx)}{۲x^۲+(mx)^۲} = \frac{mx^۳}{x^۲(m^۲+۲)} = \frac{mx}{m^۲+۲}$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{mx}{m^۲+۲} = ۰$$

بنابراین تابع در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

تمرین ۱۵. نشان دهید برای تابع تمرین قبل داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta(\epsilon) > ۰ \quad \Big(\forall (x,y) \quad ۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta \to |f(x,y)| < \epsilon\Big)$$

فرض کنید $۰ < \epsilon$ داده شده باشد.

چرک‌نویس.

$$|\frac{x^۲ y^۳}{۲x^۲ + y^۲}| = \frac{x^۲|y^۳|}{x^۲ + x^۲ + y^۲}$$

حال برای آنکه کسری بزرگتر از کسر بالا بیابیم، مخرج را کوچک و صورت را بزرگ می‌کنیم.

$$\frac{x^۲|y^۳|}{x^۲ + x^۲ + y^۲} \leqslant \frac{(x^۲ + y^۲)|y|y^۲}{x^۲ + y^۲} \leqslant \sqrt{y^۲}(x^۲ + y^۲) \leqslant \sqrt{x^۲ + y^۲}(x^۲ + y^۲) < \epsilon$$

حال اگر δ هر عدد دلخواهی باشد به طوری که $۰ < \delta < \sqrt[۳]{\epsilon}$ آنگاه

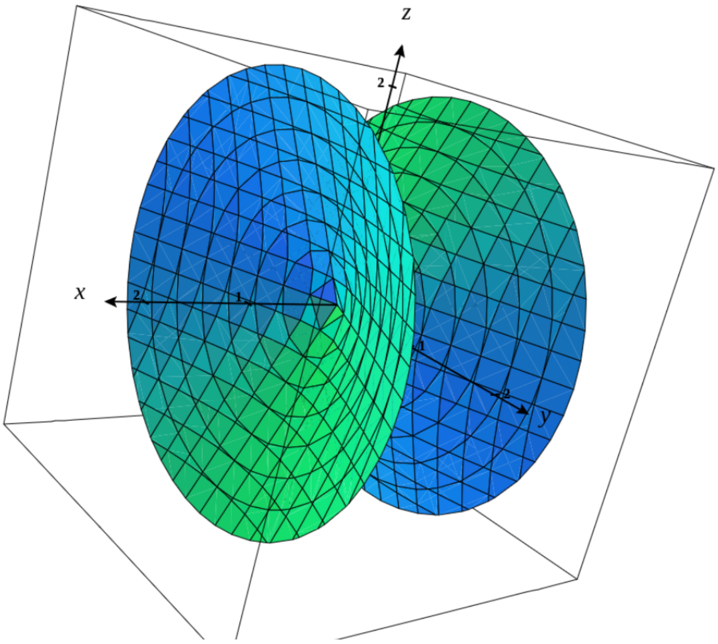
$$|f(x,y) - ۰| = |\frac{x^۲ y^۳}{۲x^۲ + y^۲}| \leqslant \sqrt{x^۲ + y^۲}(x^۲ + y^۲) \leqslant \delta^۳ < \epsilon$$

□

مثال ۹۱. مجموعه‌ی نقاطی را رسم کنید که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است.

پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ | \sqrt{y^۲ + z^۲} = ۲|x|\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ | y^۲ + z^۲ = ۴x^۲\}$$


z
2
x
2
1
1
2
y

□

۱۰ جلسه‌ی دهم

تمرین ۱۶. برای $\epsilon > \circ$ داده شده، δ را به گونه‌ای بیابید که اگر $\circ < \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} < \delta$ آنگاه

$$|f(x,y) - f(\circ,\circ)| < \epsilon$$

۱. $\epsilon = \circ/\circ۵$ $\quad f(x,y) = \frac{y}{x^{۲}+۱}$

پاسخ.

$$f(\circ,\circ) = \circ$$

چرک‌نویس.

$$|\frac{y}{x^{۲}+۱}| = \frac{\sqrt{y^{۲}}}{x^{۲}+۱} \le \sqrt{y^{۲}} \le \sqrt{y^{۲}+x^{۲}}$$

اگر $\delta < \epsilon$ آنگاه اگر $\circ < \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} < \delta$ آنگاه

$$|\frac{y}{x^{۲}+۱}| < \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} < \delta < \epsilon$$

برای $\epsilon = \circ/\circ۵$ کافیست برای مثال $\delta = \circ/\circ\circ۵$ را در نظر بگیریم. $\square$

۲. $\epsilon = \circ/\circ۵$ $\quad f(x,y) = \frac{y+x}{x^{۲}+۱}$

۳. $f(x,y) = \frac{x+y}{۲+\cos x}$

تمرین ۱۷. آیا حد زیر وجود دارد؟

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۳}+y^{۳}}$$

تمرین بالا را در جلسه‌ی بعد پاسخ گفته‌ایم.

تمرین ۱۸. نشان دهید توابع زیر در $(\circ,\circ)$ حد ندارند.

۱. $f(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$

پاسخ. مسیر $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{-x}{\sqrt{۲x^{۲}}} = \frac{-x}{\sqrt{۲}|x|} = \begin{cases} x > \circ \Rightarrow \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \\ x < \circ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

در واقع در همان مسیرِ $y = x$ در از دو طرف به دو حد متفاوت می‌رسیم. پس تابع مورد نظر در $(\circ,\circ)$ حد ندارد. $\square$

۲. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

پاسخ. توجه کنید که مسیرِ $y=x$ در این مثال، مجاز نیست زیرا این مسیر در دامنه‌ی تابع قرار ندارد.

مسیر $y=-x$:

$$f(x,y)=\frac{x+(-x)}{x-(-x)}=\text{۰}$$

مسیر $(x,\text{۰})$:

$$f(x,y)=\frac{x}{x}=\text{۱}$$

□

۱.۱۰ مشتقات جزئی

در ریاضی ۱ دیدیم که مشتق توابع تک متغیره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

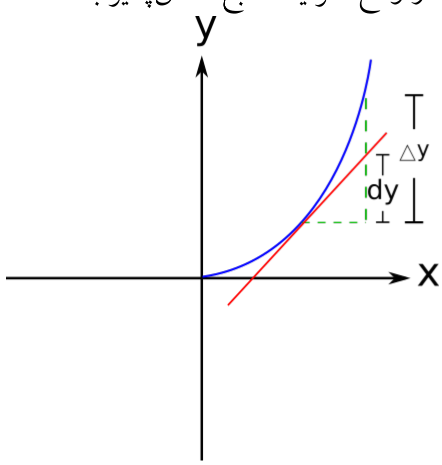
$$x_{\text{۰}}\in Dom(f)$$

$$\lim_{h\to \text{۰}}\frac{f(x_{\text{۰}}+h)-f(x_{\text{۰}})}{h}$$

از روی مشتق، نیز «دیفرانسیل» یک تابع را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$dy=f'(x)dx$$

در واقع اگر یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه Δy را می‌توان با استفاده از dy تقریب زد:



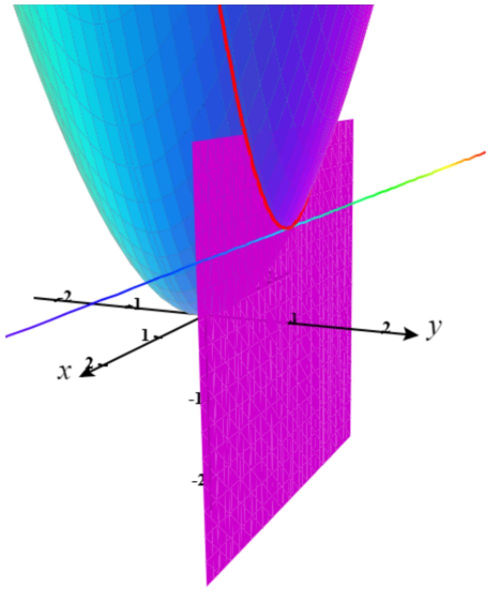
$$\Delta y\simeq dy$$

در واقع dy تغییر ارتفاع خط مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(y)$ تغییر ارتفاع تابع را. در جلسات آینده خواهیم دید که برای یک تابع $z=f(x,y)$ نیز می‌توان dz را تعریف کرد و dz نیز قرار است تقریبی برای $\Delta(z)$ باشد. در آنجا خواهیم دید که dz تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(z)$ تغییر ارتفاع تابع را. برای رسیدن به تعریفِ dz به مقدماتی

نیازمندیم که آنها را در این جلسه و چند جلسه‌ی آینده فراهم آورده‌ایم.

مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ **نسبت به متغیر** x **در نقطه‌ی** $(x_0,y_0)\in D$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (در صورتی که حد زیر موجود باشد.)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$



۱۰.۱.۱ تعبیر هندسی

مشتق جزئی نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (x_0,y_0) در واقع شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک رویه‌ی $z=f(x,y)$ و صفحه‌ی $y=y_0$ در نقطه‌ی (x_0,y_0) است (به شکل بالا نگاه کنید).

نمادگذاری

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

در واقع، مشتق جزئی بر حسب x در نقطه‌ی (x_0,y_0) را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد: تابعِ $g(x)=f(x,y_0)$ را در نظر بگیرید و مشتق این تابع را بر حسبِ x در نقطه‌ی x_0 محاسبه کنید. در واقع، منحنی ایجاد شده در محل تقاطع صفحه‌ی $y=y_0$ و رویه‌ی $z=f(x,y)$ دارای معادله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} z=g(x)=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$$

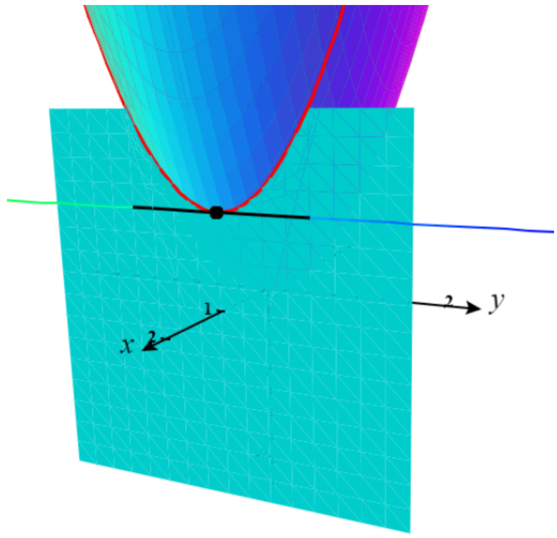
و مشتق جزئی بر حسب x در واقع شیب خط مماس بر منحنی بالاست در نقطه‌ی (x_0,y_0).

تعریف ۹۲.

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد موجود باشد.

تمرین ۱۹. بر اساس شکل زیر $f_y(x_0, y_0)$ را تحلیل هندسی کنید.



مثال ۹۳. مشتقات جزئی اول توابع زیر را در نقطه‌ی $(x_0, y_0) = (4, 5)$ محاسبه کنید.

۱. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 5) = 23$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, 5) = 13$$

توجه ۹۴. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه

$$f_x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

$$(x_0, y_0) \mapsto f_x(x_0, y_0)$$

خودْ نیز تابعی دو متغیره است، و می‌توان درباره‌ی پیوستگی یا عدم پیوستگی آن در یک نقطه سخن گفت.

راه دوم.

$$f(x, 5) = x^2 + 15x + 4 \Rightarrow f_x(x, 5) = 2x + 15 \Rightarrow f(4, 5) = 23$$

توجه ۹۵. تا کنون فهمیدیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع باشد، و $(x_0, y_0) \in D(f)$ و قرار دهیم:

$$g(x) = f(x, y_0)$$

آنگاه

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$$

و اگر قرار دهیم

$$h(y) = f(x_\circ, y)$$

آنگاه

$$h'(y_\circ) = f_y(x_\circ, y_\circ)$$

$\square$

۲. $f(x, y) = y \sin(xy)$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲ \cos(xy) \Rightarrow f_x(۴, ۵) = ۲۵ \cos(۲۰)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + xy \cos(xy) \Rightarrow f_y(۴, ۵) = \sin(۲۰) + ۲۰ \cos(۲۰)$$

$\square$

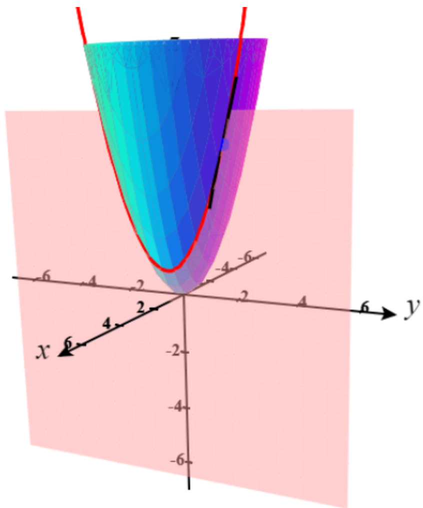
مثال ۹۶. صفحه‌ی $x = ۱$ سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ را در یک سهمی قطع می‌کند. شیب خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۵)$ بیابید.

پاسخ. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = ۲y$$

مطابق آنچه گفتیم، شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقیِ صفحه‌ی $x = ۱$ و سهمی‌وار مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(۱, ۲) = ۴$$



$\square$

توجه ۹۷. در مثال بالا، در صفحه‌ی $x = ۱$ منحنی زیر را داریم:

$$\begin{cases} z = ۱ + y^۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$z'(۲) = ۲ \times ۲ = ۴$$

مثال ۹۸. معادله‌ی خط مماس بر منحنی محل اشتراک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y.$ را بنویسید.

مثال بالا را در جلسه‌ی بعد حل خواهیم کرد.

۱۱ جلسه‌ی یازدهم، دوشنبه

۱.۱۱ مرور حد

مثال ۹۹. نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = ۰$

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad \forall(x,y)\in D \quad \left(۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}| < \epsilon\right)$$

چرک‌نویس.

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}| = \frac{|x\sin(xy)|}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{|x\sin(xy)|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{|x||xy|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{\sqrt{x^۲}|x||y|}{x^۲+y^۲} \leqslant \frac{\cancel{\sqrt{x^۲+y^۲}}\cancel{\sqrt{x^۲+y^۲}}\sqrt{x^۲+y^۲}}{\cancel{x^۲+y^۲}} \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲}$$

پس اگر $\delta < \epsilon$ آنگاه اگر $\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$ آنگاه: [۷]

$$|\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}| \leq \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta < \epsilon$$

□

مثال ۱۰۰. آیا تابع زیر در نقطه‌ی $(۰,۰)$ حد دارد؟

$$f(x,y) = \frac{x^۲y^۲}{x^۳+y^۳}$$

پاسخ. یک مسیر پیدا می‌کنیم که تابع روی آن حد ندارد.

چرک نویس:

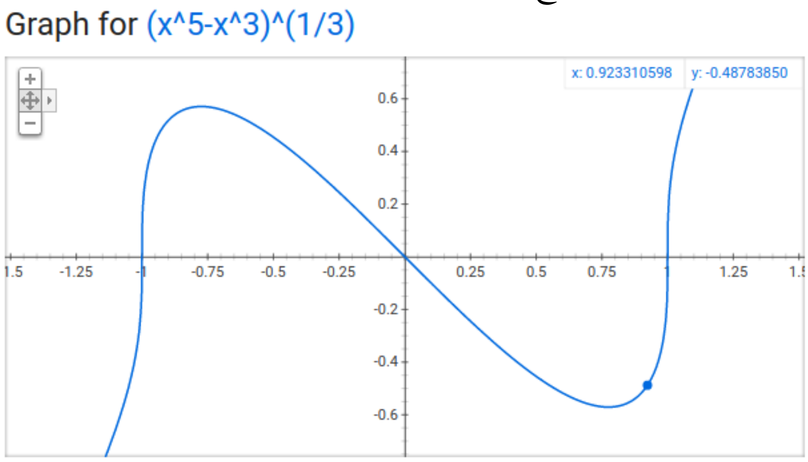
$$x^۳+y^۳ = x^۵ \Rightarrow y^۳ = x^۵ - x^۳ \Rightarrow y = \sqrt[۳]{x^۵-x^۳}$$

اگر مسیر $y = \sqrt[۳]{x^۵-x^۳}$ را انتخاب کنیم، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to۰} \frac{x^۲(x^۵-x^۳)^{\frac{۲}{۳}}}{x^۵} = \lim_{x\to۰} \frac{x^۲\left(x^۳(x^۲-۱)\right)^{\frac{۲}{۳}}}{x^۵} = \lim_{x\to۰} \frac{(x^۲-۱)^{\frac{۲}{۳}}}{x}$$

[۷] در کلاس گفتم که نیاز به یک همسایگیِ $\delta_۱$ داریم که در آن نامساویِ $|\sin(xy)| \leq |xy|$ برقرار باشد؛ ولی همان طور که خودِ شما به درستی اشاره کردید، نیازی بدان نداریم.

حد فوق وجود ندارد، پس حد تابع وجود ندارد. در زیر مسیر یادشده کشیده شده است:



□

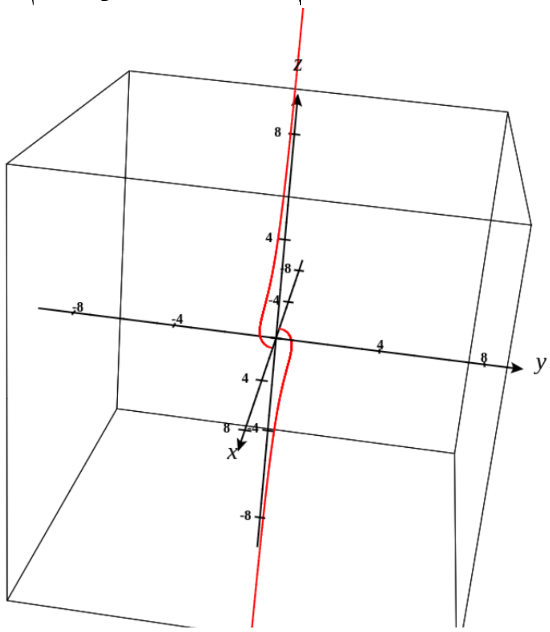
توجه کنید که خط به معادله‌ی $y=\sqrt[۳]{x^۵-x^۳}$ را در فضای دوبعدی می‌توان یک **تابع برداری** به صورت زیر تصور کرد:

$$\overrightarrow{r}(t)=(t,\sqrt[۳]{t^۵-t^۳}).$$

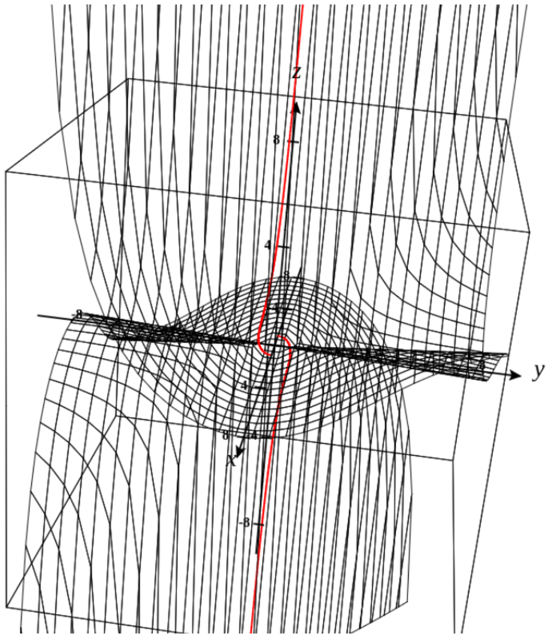
وقتی که روی منحنی فوق در صفحه‌ی xy حرکت کنیم، آنگاه، طبق محاسبات بالا، روی رویه، منحنی زیر ایجاد می‌شود:

$$\overrightarrow{r}(t)=(t,\sqrt[۳]{t^۵-t^۳},\frac{(t^۲-۱)^{\frac{۲}{۳}}}{t})$$

در زیر شکل این منحنی را کشیده‌ایم (از روی این شکل معلوم می‌شود که چرا تابع بالا حد ندارد):



در زیر رویه را به همراه منحنی بالا که روی آن واقع است می‌بینید:

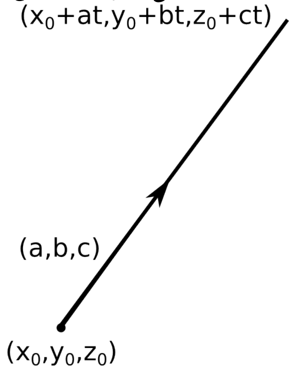


۲.۱۱ ادامه‌ی بحث مشتقات جزئی

یادآوری ۱۰۱. معادله‌ی پارامتری، معادله‌ای است که در آن رابطه‌ی میان x, y, z به طور مستقیم نوشته نشود، بلکه رابطه‌ی میان آنها توسط وابستگی آنها به یک پارامتر دیگر، مثلاً زمان بیان شود. یک نمونه معادله‌ی پارامتری را در مثال بالا دیدید. به عنوان مثال دیگر، هر خط راست را می‌توان در فضای سه‌بعدی توسط یک معادله‌ی برداریِ به صورت زیر نوشت:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x. + at, y. + bt, z. + ct)$$

از روی شکل زیر مشخص است که معادله‌ی بالا چگونه به دست آمده است:



پس

$$(x, y, z) = (x., y., z.) + t(a, b, c)$$

به بیان دیگر:

$$\begin{cases} x = x. + at \\ y = y. + bt \\ z = z. + ct \end{cases}$$

بردارِ (a, b, c) را بردارِ جهت خط بالا می‌خوانیم.

توجه ۱۰۲. در واقع تابع برداریِ $\mathbf{r}(t)$ یک عدد می‌گیرد و یک بردار می‌دهد:

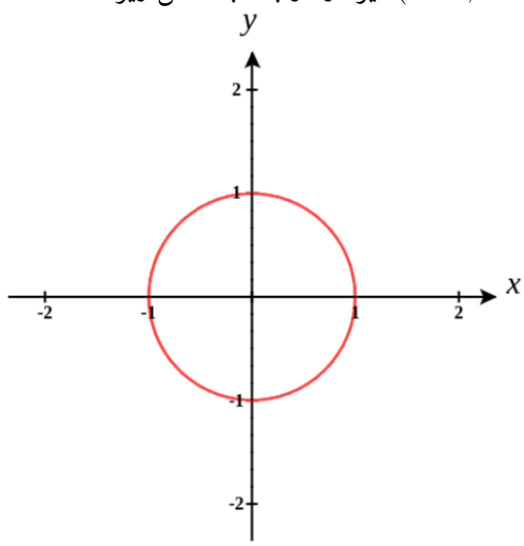
$$t \mapsto \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$$

$$\Big(x_\circ + at, y_\circ + bt, z_\circ + ct\Big)$$

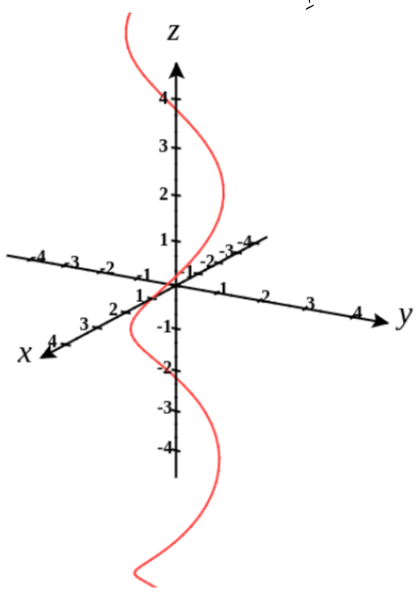
هنگام رسم چنین تابعی، پارامترِ t را رسم نمی‌کنیم و فقط مقادیر برداری به دست آمده بر حسب آن را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۰۳. منحنی فضائی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کنید.

توجه کنید که از آنجا که $x(t)^۲ + y(t)^۲ = ۱$، منحنی مورد نظر روی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ واقع شده است. منحنی $(\cos t, \sin t)$ نیز در دو بُعد به شکل زیر است.

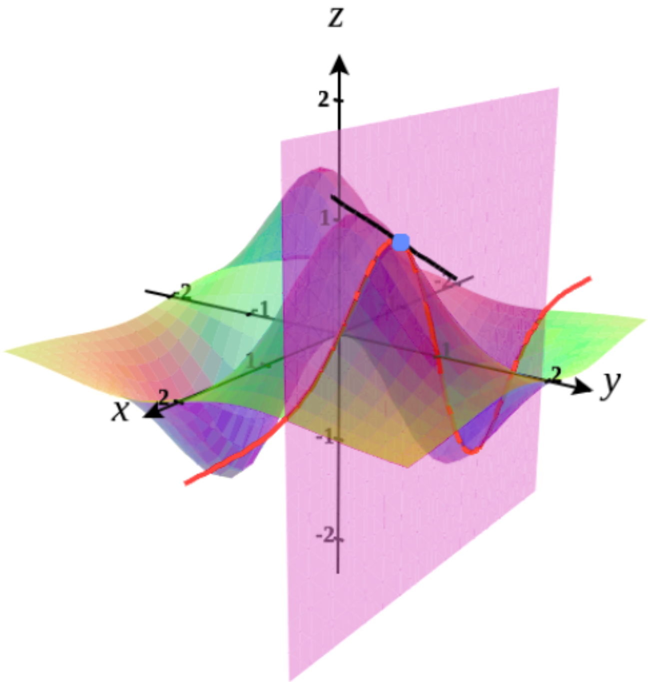


در زیر، خمِ $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کرده‌ایم:



خم بالا به صورت مارپیچ دور استوانه می‌چرخد.

مثال ۱۰۴. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_\circ$ را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بنویسید.



پاسخ.

شیب خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$$

معادله‌ی خط:

$$\begin{cases} z - z_\circ = \frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) \\ y = y_\circ \end{cases}$$

معادله‌ی پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_\circ \\ z = z_\circ - \frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)x_\circ + \frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)t \end{cases}$$

بردار مولد خط این مثال برابر است با

$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\right)$$

بیان دوم. در صفحه‌ی $y = y_\circ$ منحنیِ $z = g(x) = f(x, y_\circ)$ را داریم. معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x_\circ$ به صورت زیر است:

$$z - z_\circ = g'(x_\circ)(x - x_\circ)$$

که در آن $g'(x_\circ)$ برابر است با

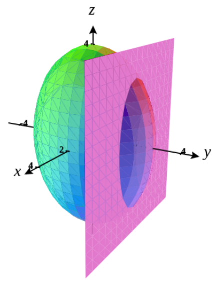
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$$

□

تمرین ۲۰. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $x = x_\circ$ را در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بنویسید.

مثال ۱۰۵. بیضی‌وار $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ صفحه‌ی $y = ۲$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادلات پارامتری خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۲)$ بنویسید. (بیضی مورد نظر را نیز رسم کنید.)

پاسخ.



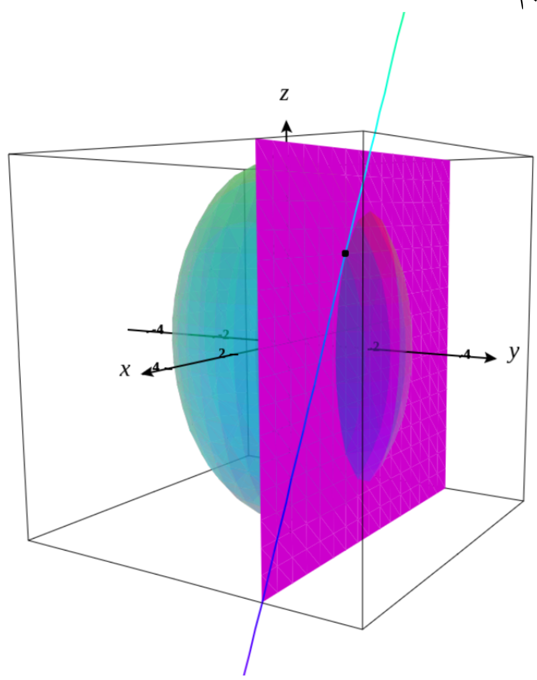
$$\begin{cases} z - z_۰ = \frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲)(x - ۱) \\ y = ۲ \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $\partial z/\partial x$ از دو طرف معادله‌ی $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۱۶$ بر حسب x مشتق می‌گیریم.

$$۸x + ۰ + ۲Z\frac{\partial z}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲) = -۲$$

$$\begin{cases} z = ۴ - ۲t \\ y = ۲ \\ x = t \end{cases}$$

در زیر وضعیت بالا ترسیم شده است:



□

مثال ۱۰۶. فرض کنید x و y مستقل از هم باشند و z به آنها وابسته باشد و داشته باشیم:

$$yz - \ln z = x + y$$

آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{۱}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=۱\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(y-\frac{۱}{z})=۱\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{y-\frac{۱}{z}}$$

□

تمرین ۲۱. اگر داشته باشیم

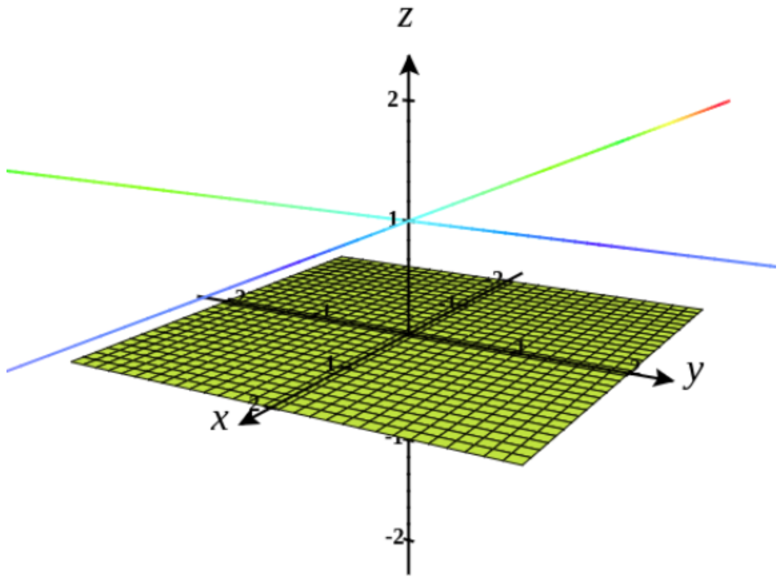
$$f(x,y)=x(x^{۲}+y^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}e^{\sin(x^{۲}y)}$$

آنگاه $f_x(۱,۰)$ را بیابید.

توجه ۱۰۷. در توابع تک متغیره (مثلاً تابع $y=f(x)$) دیدیم که اگر مشتق تابع در یک نقطه‌ی $x=x_۰$ موجود باشد، آنگاه تابع در آن نقطه پیوسته است. اما در توابع $z=f(x,y)$ ممکن است $\frac{\partial z}{\partial x}(x_۰,y_۰)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}(x_۰,y_۰)$ هر دو موجود باشند ولی تابع در $(x_۰,y_۰)$ پیوسته نباشد.

مثال ۱۰۸. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases}۰ & xy\neq ۰\\ ۱ & xy=۰\end{cases}$$



نشان دهید که تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته نیست، اما $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ هر دو موجودند.

توجه ۱۰۹. اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ هر دو در یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند آنگاه f در نقطه‌ی (a,b) پیوسته است. در درسهای آینده خواهیم دید که تحت شرایط ذکر شده، در واقع، تابع مورد نظر **دیفرانسیل‌پذیر** است.

تمرین ۲۲.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۳}y}{x^{۶}+y^{۶}} & \neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

نشان دهید که f_x و f_y در تمام نقاط موجودند و در $(۰,۰)$ پیوسته نیستند. نشان دهید که f در مبدأ پیوسته نیست.

۳.۱۱ مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع $z = f(x,y)$

گفتیم که اگر $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ نیز توابعی دو متغیره هستند. پس می‌توان مشتقات جزئی آنها را نیز در نظر گرفت:

۱. $(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = f_{۱۱}$

۲. $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = f_{۱۲}$ (به ترتیب نوشتن متغیرها توجه کنید)

۳. $(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = f_{۲۱}$

۴. $(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = f_{۲۲}$

مثال ۱۱۰. مشتقات f_{xy} و f_{yx} را در یک نقطه‌دلخواه (a,b) بیابید.

$$f(x,y) = x^۳ + x^۲y^۳ - ۲y^۲$$

پاسخ.

$$f_x = ۳x^۲ + ۲xy^۳ - ۰$$

$$f_y = ۳x^۲y^۲ - ۴y$$

$$f_{xy}(a,b) = ۶ab^۲ = f_{yx}$$

□

در مثال بالا مشاهده کردید که f_{xy} با f_{yx} برابر شد. هر چند این امر عجیب به نظر می‌رسد، ولی تحت شرایطی همواره برقرار است. در جلسه‌ی بعد در این باره صحبت خواهیم کرد.

۴.۱۱ تمرین

تمرین ۲۳. نشان دهید که حدهای زیر موجود نیستند.

۱. $\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{xy+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$

۲. $\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{xy+yz^۲+xz^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}$

تمرین ۲۴. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} \frac{x^۲y^۲z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲} = ۰$$

تمرین ۲۵. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

تابعی پیوسته است.

تمرین ۲۶. حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱. $\lim_{(x,y)\to(۱,۱),x\neq ۱} \frac{xy-y-۲x+۲}{x-۱}$

۲. $\lim_{(x,y)\to(۲,-۴),x\neq x^۲,y\neq -۴} \frac{y+۴}{x^۲y-xy+۴x^۲-۴x}$

۳. $\lim_{(x,y)\to(۴,۳),x\neq y+۱} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+۱}}{x-y-۱}$

تمرین ۲۷. $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

۱. $f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy}$

۲. $f(x,y)=(x^۲-۱)(y+۲)$

۳. $f(x,y)=\frac{۱}{x+y}$

۴. $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

۵. $f(x,y)=\int_x^y g(t)dt$ که در آن $g(t)$ تابعی پیوسته است.

تمرین ۲۸. تمام مشتقات جزئی دوم را بیابید.

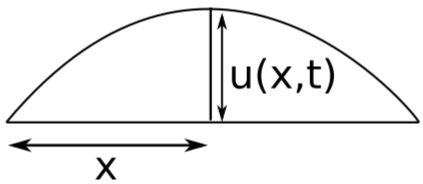
۱. $f(x,y)=x^۲y+\cos y+y\sin x$

۲. $h(x,y)=xe^y+y+۱$

۳. $s(x,y)=\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$

تمرین ۲۹. **معادله‌ی موج** به صورت کلی زیر است:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}=a^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$



در معادله‌ی بالا، ضریبِ a به جنس طناب بستگی دارد. نشان دهید که تابع $u(x,t)=\sin(x-at)$ در معادله‌ی موج صدق می‌کند.

۱۲ نیم جلسه‌ی دوازدهم، چهارشنبه

پیش از آن که درس را شروع کنیم، لازم است در پاسخ به سوال یکی از دانشجویان مورد **یک روش اشتباه** برای محاسبه‌ی حد توضیحی بدهیم:

مثال ۱۱۱. ثابت کنید

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y}{x^۲+۱} = ۰$$

پاسخ. چرک‌نویس.

$$|\frac{y}{x^۲+۱}| \leq \frac{\sqrt{y^۲}}{x^۲+۱} \leq \frac{\sqrt{y^۲+x^۲}}{x^۲+y^۲} = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

پاسخ اشتباه برای سوال بالا:

بنا به محاسبات بالا باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{\delta} < \epsilon \to \delta > \frac{۱}{\epsilon}$$

مثلا اگر به ما $\epsilon = ۰/۰۵$ داده باشند داریم:

$$\delta > ۲۰!$$

پاسخ بالا درست نیست. توجه کنید که ما به دنبال یک δ هستیم به طوری که عبارت زیر درست باشد:

$$\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |f(x,y)| < \epsilon$$

بنا به محاسبات بالا اگر $\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$ آنگاه

$$|f(x,y)| \leq \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \geq \frac{۱}{\delta}$$

و از قسمت آخر عبارت بالا نمی‌توان بهره‌ی چندانی برد!

برای دیدن پاسخ درست این سوال به جلسات قبل مراجعه کنید. □

۱.۱۲ ادامه‌ی مشتقات جزئی

در جلسه‌ی قبل گفتیم برای یک تابع اتفاقیِ f دیدیم که $f_{xy} = f_{yx}$. در زیر قضیه‌ای آورده‌ایم که شرطی کافی برای رویداد بالا به دست می‌دهد:

قضیه ۱۱۲ (اویلر). فرض کنید تابع f در یک دیسک D به مرکز (a,b) تعریف شده باشد. اگر f_{xy} و f_{yx} هر دو در این دیسک پیوسته باشند آنگاه

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

قضیه‌ی بالا با چند بار به کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین ثابت می‌شود. اثبات آن جزو اهداف این درس نیست ولی در پایان جزوه‌ی این جلسه، اثبات آن را از کتاب استوارت برای دانشجوی علاقه‌مند گذاشته‌ایم.

تمرین ۳۰. در مثال‌های زیر بررسی کنید که آیا محاسبه‌ی f_{xy} آسان‌تر است یا f_{yx}؟

۱. $x\sin y + e^y$

۲. $x\ln(xy)$

۳. $\frac{1}{x}$

مثال ۱۱۳ (مثال نقض برای قضیه‌ی بالا)**.** در مثال زیر می‌بینیم که اگر شرایط قضیه‌ی بالا برقرار نباشند، آنگاه حکم آن نیز برقرار نیست. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

داریم

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

روش محاسبه‌ی $f_x(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+h)-f_x(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-h^3)(h^2)}{h^5}=-1$$

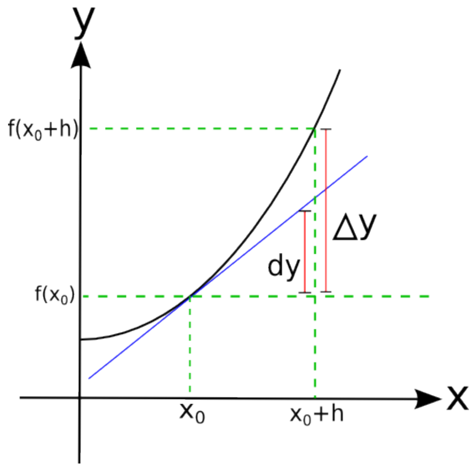
تمرین ۳۱. نشان دهید که $f_{yx}(0,0)=1$

پس در بالا $f_{yx}(0,0)=1$ و $f_{xy}(0,0)=-1$.

تمرین ۳۲. نشان دهید که این مشاهده قضیه‌ی بالا را نقض نمی‌کند.

۲.۱۲ صفحه‌ی مماس

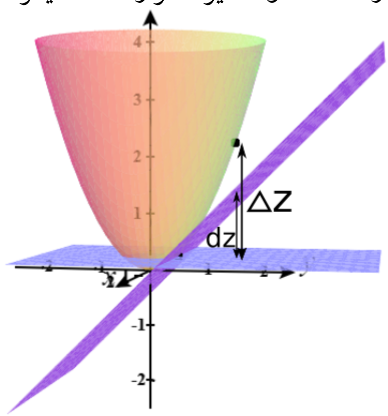
در جلسات آینده قرار است مفهوم دیفرانسیل کُلّی را برای یک تابع دو متغیره تعریف کنیم. این مفهوم ارتباط تنگاتنگی با مفهوم صفحه‌ی مماس دارد. این ارتباط، البته دور از انتظار نیست. زیرا در حالت تک‌متغیره نیز، دیفرانسیل یک تابع، تغییرات خط مماس بر منحنی را نشان می‌داد:



$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)h$$

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

در حالت دو متغیره، قرار است دیفرانسیل، نمایانگر تغییرات صفحه‌ی مماس باشد:



$$\Delta z \approx dz$$

در درسهای آینده، dz را تعریف خواهیم کرد. فعلاً در این جلسه به معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه می‌پردازیم:

قضیه ۱۱۴. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) به صورت زیر است.

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

مشاهده ۱۱۵. می‌دانیم معادله‌ی صفحه به صورت $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ است که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

توجه ۱۱۶. بنا به قضیه‌ی بالا، بردار نرمال صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0) برابر است با

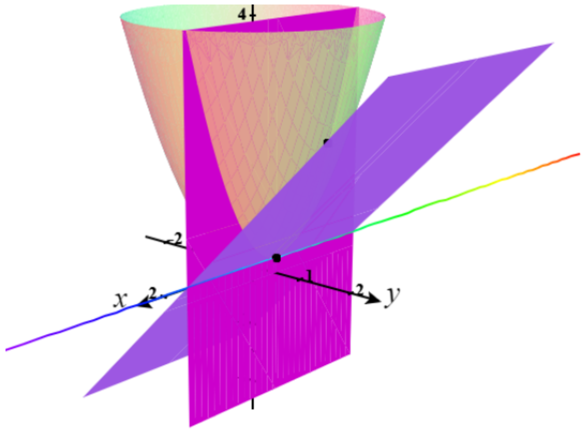
$$\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big)$$

اثبات قضیه. با توجه به مشاهده‌ی بالا می‌دانیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

محاسبه‌ی A: قرار دهید $y = y_0$. اشتراک صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $y = y_0$ خط مماس بر منحنی ایجاد شده از اشتراک رویه با صفحه‌ی $y = y_0$ است. معادله‌ی خط مماس مورد نظر برابر است با

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$



پس داریم

$$A = f_x(x_0, y_0)$$

به طور مشابه

$$B = f_y(x_0, y_0)$$

□

توجه کنید که صفحه‌ی مماس بر یک رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) در واقع شامل خطوط مماس (در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0)) بر منحنی‌هائی است که از اشتراک رویه با صفحات گذرنده از نقطه‌ی $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ایجاد می‌شوند.

اثبات قضیه‌ی اویلر:

Clairaut's Theorem Suppose f is defined on a disk D that contains the point (a, b). If the functions f_{xy} and f_{yx} are both continuous on D, then $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

PROOF For small values of h, $h \neq 0$, consider the difference

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Notice that if we let $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, then

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

By the Mean Value Theorem, there is a number c between a and $a + h$ such that

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Applying the Mean Value Theorem again, this time to f_x, we get a number d between b and $b + h$ such that

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combining these equations, we obtain

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

If $h \to 0$, then $(c, d) \to (a, b)$, so the continuity of f_{xy} at (a, b) gives

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Similarly, by writing

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

and using the Mean Value Theorem twice and the continuity of f_{yx} at (a, b), we obtain

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

It follows that $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

۱۳ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در [۸] جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ به صورت زیر است:

$$z - z_\circ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$$

مثال ۱۱۷. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار بیضوی $z = x^{۲} + y^{۲}$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱, ۱) = ۲x|_{x=۱} = ۲$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۱, ۱) = ۲y|_{y=۱} = ۲$$

$$z - ۲ = ۲(x - ۱) + ۲(y - ۱)$$

□

توجه ۱۱۸. صفحه‌ی به معادله‌ی $z - z_\circ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$ درواقع **تقریبی خطی** برای تابع $z = f(x,y)$ حول نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ است. منظور از یک تقریب خطی، تابعی است به صورت $ax + by$. در واقع هدفمان در بحث دیفرانسیل‌پذیری این است که تقریبی به صورت $ax + by$ برای یک تابعِ $f(x,y)$ پیدا کنیم.

سوال ۱۱۹. آیا تقریب خطی بالا همواره تقریب **مناسبی** برای مقادیر تابع است؟

مثال ۱۲۰.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

تمرین ۳۳. نشان دهید که f_x و f_y در نقطه ی $(۰, ۰)$ پیوسته نیستند و

$$f_x(۰, ۰) = ۰$$

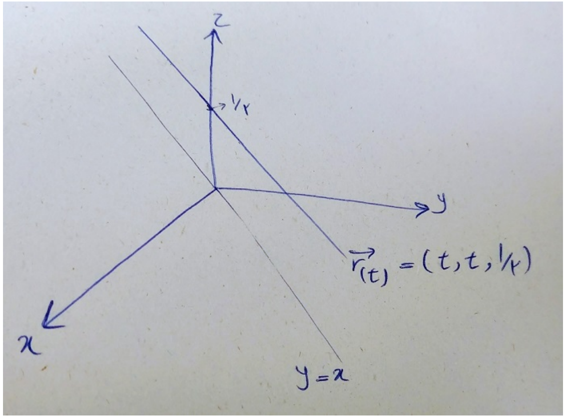
$$f_y(۰, ۰) = ۰$$

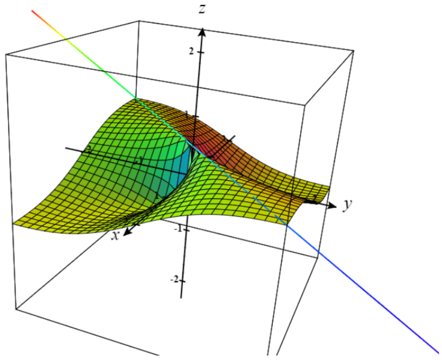
پس معادله‌ی (صفحه‌ی مماس) بالا به صورت زیر در می آید:

$$z = ۰.$$

صفحه‌ی بالا تقریب مناسبی برای مقادیر تابع نیست؛ زیرا روی روی خط $x = y$ مقدار تابع برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و با این صفحه فاصله‌ی زیادی دارد.

[۸] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.





در واقع **صفحه‌ی مماس در صورتی تقریبی مناسب برای تابع است، که تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد.**

تعریف ۱۲۱ (غیررسمی). اگر تقریب خطی یاد شده تقریب مناسبی برای مقادیر تابع حول نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ باشد، می‌گوییم تابع مورد نظر در نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

در ادامه، به بررسی دقیق این گفته می‌پردازیم.

۱.۱۳ دیفرانسیل پذیری، مقدمه

پیش از آنکه دیفرانسیل‌پذیریِ توابع دو متغیره را توضیح دهیم، مفهوم دیفرانسیل‌پذیریِ توابع تک‌متغیره را مرور می‌کنیم. فرض کنید

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

یک تابع تک‌متغیره باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که حد زیر (در صورت وجود) مشتق تابع را به دست می‌دهد:

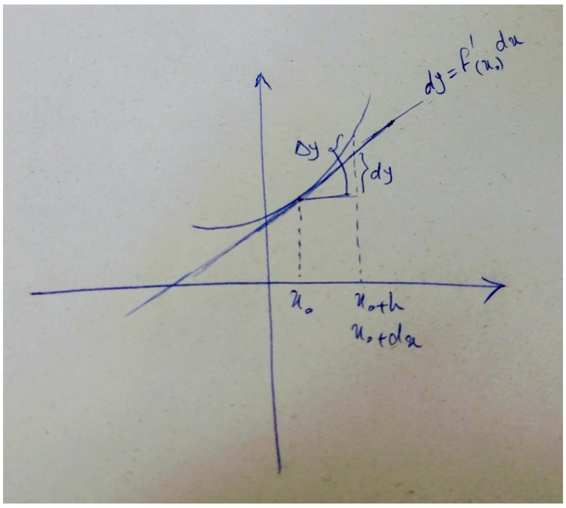
$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} = f'(x_\circ)$$

همچنین گفتیم که اگر $f'(x_\circ)$ موجود باشد آنگاه $dy = f'(x_\circ)dx$ **دیفرانسیل** تابع نامیده می شود. گفتیم که dy در واقع تقریبیِ برای Δy است؛ پس

$$y - y_\circ \approx dy = f'(x_\circ)(x - x_\circ)$$

توجه کنید که معادله‌ی خط مماس بر تابع در نقطه‌ی $x_\circ$ به صورت زیر است (به شباهت دیفرانسیل و معادله‌ی این خط مماس توجه کنید).

$$y - y_\circ = f'(x_\circ)(x - x_\circ)$$



تعریف دقیق دیفرانسیل‌پذیری برای توابع تک متغیره بدین صورت است: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نقطه‌ی $x_0\in D_f$ دیفرانسیل‌پذیر می‌خوانیم هرگاه $\alpha\in\mathbb{R}$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h}{h}=0$$

در واقع وقتی تابع دیفرانسیل‌پذیر است، تابع خطیِ αh شبیه به تابع $f(x_0+h)-f(x_0)$ می‌شود. بیایید تابع صورت را $\epsilon(h)$ بخوانیم؛ داریم

$$f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h=h\epsilon(h)$$

پس

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\epsilon(h)+\alpha h$$

دقت کنید که [9]

$$\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$$

اگر f دیفرانسیل پذیر باشد،می توان ثابت کرد که $\alpha=f'(x_0)$. پس

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}=0$$

۲.۱۳ تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری(برای توابع دو متغیره)

حال می‌خواهیم مفهوم دیفرانسیل‌پذیری را به توابع دو متغیره تعمیم بدهیم. در بالا گفتیم که تابعِ αh تقریبی برای $f(x_0+h)-f(x_0)$ است و دیفرانسیل به صورتِ αdx است. در حالت دو متغیره، تقریب خطی ما برای تابع به صورتِ $\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2$ است.

تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را در نقطه‌ی (x_0,y_0) دیفرانسیل پذیر می خوانیم هرگاه $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ چنان موجود باشند که

[9] معادله‌ی بالا در واقع قضیه‌ی نمو برای توابع تک‌متغیره است.

$$\star \quad \lim_{(h_۱,h_۲)\to(۰,۰)} \frac{f(x_۰+h_۱, y_۰+h_۲) - f(x_۰, y_۰) - \alpha_۱ h_۱ - \alpha_۲ h_۲}{\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲}} = ۰$$

مطابق حالت تک متغیره قرار دهید:

$$\epsilon(h_۱,h_۱) = \frac{f(x_۰+h_۱, y_۰+h_۲) - f(x_۰, y_۰) - \alpha_۱ h_۱ - \alpha_۲ h_۲}{\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲}}$$

پس تابعِ f دیفرانسیل پذیر است هرگاه $\alpha_۱, \alpha_۲, \epsilon(h_۱,h_۲)$ موجود باشند به طوری که

$$\Rightarrow \epsilon(h_۱,h_۲)\sqrt{h_۱^۲+h_۲^۲} + f(x_۰, y_۰) + \alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲ = f(x_۰+h_۱, y_۰+h_۲)$$

و $\lim_{(h_۱,h_۲)\to(۰,۰)} \epsilon(h_۱,h_۲) = ۰$

توجه ۱۲۲. اگر f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$(\alpha_۱, \alpha_۲) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰), \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰))$$

و می‌نویسیم:

$$f'(x_۰, y_۰) = (\alpha_۱, \alpha_۲).$$

برای اثبات این نکته کافیست حد اصلیِ بالا $(\star)$ را روی مسیرهای $(h,۰)$ و $(۰,h)$ محاسبه کنیم.

توجه ۱۲۳. تنها وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)$ باعث دیفرانسیل پذیری نمی‌شود و باید حد نوشته شده در تعریف اصلی، صفر شود.

توجه ۱۲۴. اگر f در نقطه ی $(x_۰, y_۰)$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{(h_۱,h_۲)\to(۰,۰)} f(x_۰+h_۱, y_۰+h_۲) = f(x_۰, y_۰)$$

اثبات به عهده ی شما (از حد نوشته شده در تعریف $\star$ کمک بگیرید)

مثال ۱۲۵.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

در این مثال f_x و f_y در $(۰,۰)$ موجودند، ولی تابع در این نقطه پیوسته نیست، پس در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۱۲۶. نشان دهید که تابع زیر در $(۰,۰)$ دیفرانسیل پذیراست.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

پاسخ. مشتقات جزئی:

$$f_x(0,0)=\lim_{h_1\to 0}\frac{f(0+h_1,0)-f(0,0)}{h_1}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,0+h_2)-f(0,0)}{h_2}=0$$

حد دیفرانسیل پذیری:

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\alpha_1 h_1-\alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

توجه ۱۲۷. اگر تابع f دیفرانسیل پذیر باشد، داریم:

$$\alpha_1=f_x$$

$$\alpha_2=f_y$$

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h_1-f_y(x_0,y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

پس در مورد تابع بالا کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(0)h_1-(0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

یعنی باید ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

باید نشان داد که

$$\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall(h_1,h_2)$$

$$\left(0<\sqrt{h_1^2+h_2^2}<\delta\to\left|\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right|<\epsilon\right)$$

چرک نویس:

با توجه به $|h_1^2-h_2^2|\le|h_1^2+h_2^2|$ داریم:

$$\frac{|h_1h_2||(h_1^2-h_2^2)|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}|h_1^2+h_2^2|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

با توجه به محاسبات بالا، برای هر $\epsilon>0$ اگر $\delta=\epsilon$ آنگاه اگر

$$\sqrt{h_1^2+h_2^2}<\delta$$

آنگاه

$$\frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^3}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta = \epsilon$$

□

قضیه ۱۲۸ (قضیه‌ی نِمُوْ). [10]
تابع $f(x,y)$ در نقطه ی (x_0, y_0) دیفرانسیل پذیر است اگر و تنها اگر توابع $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ و $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ موجود باشند بطوری که در یک همسایگی نقطه‌ی (x_0, y_0) بتوان نوشت:

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{=\Delta z} =$$

$$f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$$
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

اثبات به عهده ی شما.

برای بررسی دیفرانسیل‌پذیری لزوماً از تعاریف استفاده نمی‌کنیم. در قضیه‌ی زیر شرطی کافی برای دیفرانسیل‌پذیر بودن بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱۲۹. اگر f_x و f_y هردو در یک همسایگی نقطه‌ی (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه f در آن نقطه دیفرانسیل‌پذیر است.

مثال ۱۳۰. نشان دهید که تابع $f(x,y) = xe^{xy}$ در نقطه ی $(1, 0)$ دیفرانسیل‌پذیر است و یک تقریب خطی برای این تابع در آن همسایگی بیابید.

پاسخ.

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

توابع بالا در تمام نقاط از جمله نقطه‌ی $(1, 0)$ پیوسته اند. پس تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است.
تقریب خطی:

$$\Delta z \approx f_x(1,0)\Delta x - f_y(1,0)\Delta y$$

$$f_x(1,0) = 1 + 0 = 1$$

$$f_y(1,0) = 1$$

$$\Delta z \approx \Delta x + \Delta y \Rightarrow f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) \approx f(1,0) + \Delta x + \Delta y = 1 + \Delta x + \Delta y$$

[10] Increment

پس می‌توان نوشت:

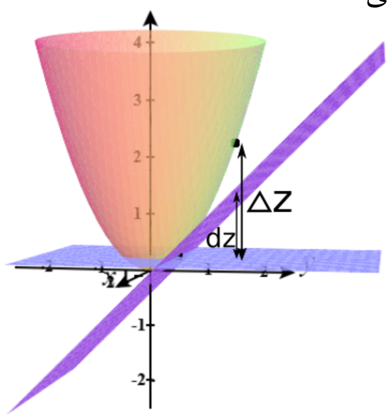
$$f(x, y) \approx ۱ + (x - ۱) + (y) = x + y$$

$\square$

تعریف ۱۳۱. اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد، **دیفرانسیل کُلّی** آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

بنا به آنچه درباره‌ی معادله‌ی صفحه‌ی مماس گفتیم، دیفرانسیل کلی در واقع میزان تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد:



۱۴ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

۱.۱۴ دیفرانسیل‌پذیری

در جلسه‌ی قبل گفتیم که اگر

$$z = f(x, y)$$

یک تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه دیفرانسیل کلی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$$

مشاهده ۱۳۲. گفته‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = dz$$

گفتیم که دیفرانسیل از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و ازاین رو تقریبی برای تابع به دست می‌دهد.
برای توابع زیر حول نقاط داده شده یک تقریب خطی بنویسید.

۱. تابع $x\ln(xy - ۵) + ۱$ حول نقطه‌ی $(۲, ۳)$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(xy - ۵) + xy \times \frac{۱}{xy - ۵} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(۲, ۳) = \cancelto{۰}{\ln(۱)} + ۶ = ۶$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^۲ \times \frac{۱}{xy - ۵} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(۲, ۳) = ۴$$

$$f(x, y) \approx f(x_۰, y_۰) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)\big(x - x_۰\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)\big(y - y_۰\big)$$

$$f(x, y) \approx ۱ + ۶(x - ۲) + ۴(y - ۳) = ۶x + ۴y - ۲۳$$

□

۲. تابع $f(x, y) = \sqrt{xy}$ حول نقطه‌ی $(۱, ۴)$

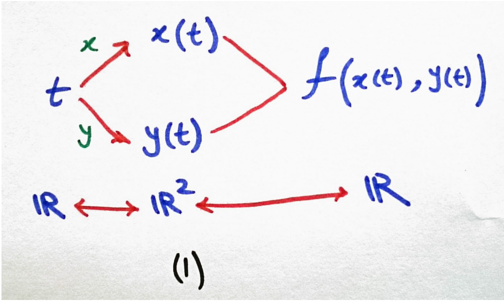
۳. تابع $f(x, y) = x^۲ e^y$ حول نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$

۴. تابع $f(x, y) = y + \sin(\frac{x}{y})$ حول نقطه‌ی $(۰, ۳)$

۲.۱۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x و y باشند. فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ نیز توابعی تک متغیره و دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه z را می‌توان به عنوان یک تابع دیفرانسیل‌پذیر از t در نظر گرفت:

$$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$



داریم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

پس:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

به بیان دیگر:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

مثال ۱۳۳. اگر $z = x^۲y + ۳xy^۴$، و $x(t) = \sin ۲t$ و $y(t) = \cos t$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ را بیابید.

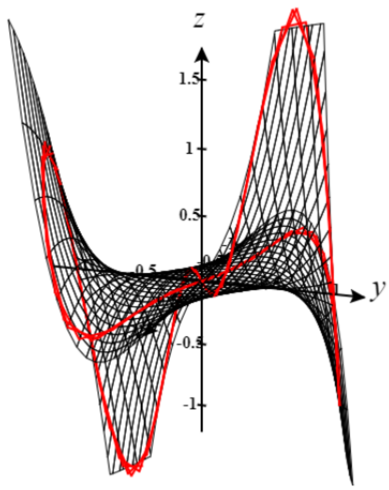
پاسخ.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

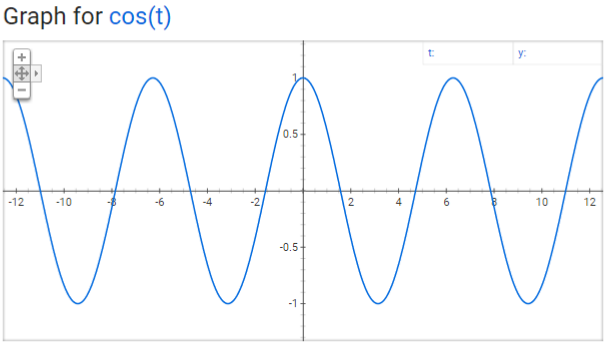
$$z'(t) = (۲yx + ۳y^۲)(۲\cos ۲t) + (x^۲ + ۱۲xy^۳)(-\sin t)$$

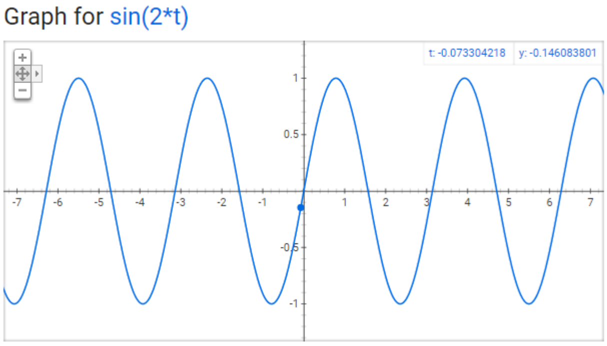
$$\Rightarrow z'(t) = (۲\sin ۲t\cos t + ۳\cos^۴ t)(۲\cos ۲t) + (\sin^۲ ۲t + ۱۲\sin ۲t + \cos^۳ t)(-\sin t)$$

در زیر منحنیِ $(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$ کشیده شده است؛ واضح است که این منحنی، روی رویه واقع است:



در زیر گرافهای توابع $\sin(2t), \cos(t)$ را کشیده‌ایم:

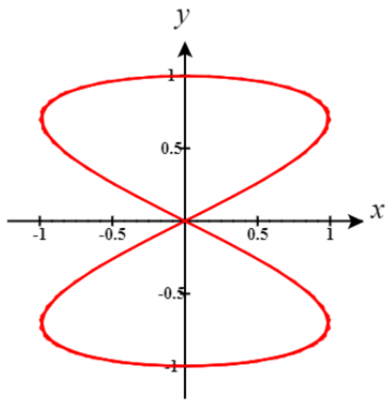




در زیر تابع برداریِ

$$\vec{r}(t) = \big(\sin 2t, \cos t\big) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

را رسم کرده‌ایم:



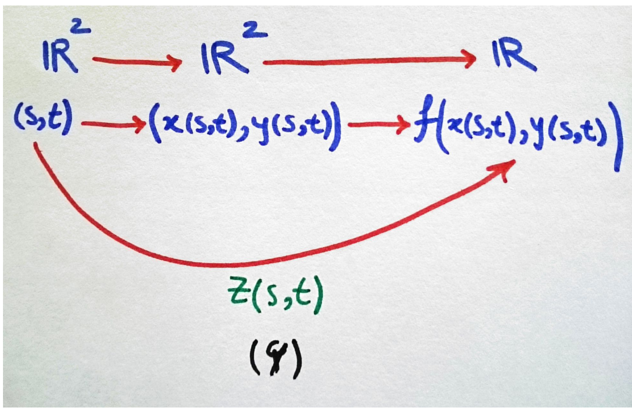
$\square$

۳.۱۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای (حالت دوم)

فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x و y باشد و $x(s,t)$ و $y(x,t)$ نیز توابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب s و t باشند. آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



تمرین ۳۴. ثابت کنید که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

راهنمایی ۱۳۴.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\Rightarrow$$

$$①\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$②\quad \frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

عبارت آمده در تمرین را بنویسید و طرفین ـ وسطین کنید.

توجه ۱۳۵. عبارت زیر نادرست است.

$$\frac{dy}{dx}\neq\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

مثال ۱۳۶. فرض کنید $z=e^x\sin y$، $x=st^۲$ و $y=s^۲t$. آنگاه $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=(e^x\sin y)(t^۲)+(e^x\cos y)(۲st)=t^۲e^{st^۲}\sin(s^۲t)+۲ste^{st^۲}\cos(s^۲t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=(e^x\sin y)(۲st)+(e^x\cos y)(s^۲)=۲ste^{st^۲}\sin(s^۲t)+s^۲e^{st^۲}\cos(s^۲t)$$

□

مثال ۱۳۷. فرض کنید $z=f(x,y)$، $x=r^۲+s^۲$ و $y=۲rs$. $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}(۲r)+\frac{\partial z}{\partial y}(۲s)$$

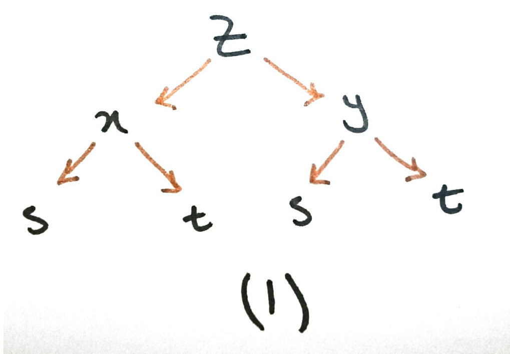
$$\frac{\partial z}{\partial r}:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$$

بقیه‌ی پاسخ در جلسه‌ی بعد. □

۱۵ نیم جلسه‌ی پانزدهم، چهارشنبه

۱.۱۵ ادامه‌ی قاعده‌ی زنجیره‌ای

برای به خاطر سپردن نحوه‌ی به کارگیری قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان از درخت زیر استفاده کرد:



مثلاً برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسبِ s باید تمام مسیرها از بالای درخت به سمت s طی شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال ۱۳۸. فرض کنید $z = f(x, y)$ مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته باشد و

$$x = r^۲ + s^۲$$

$$y = ۲rs$$

آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

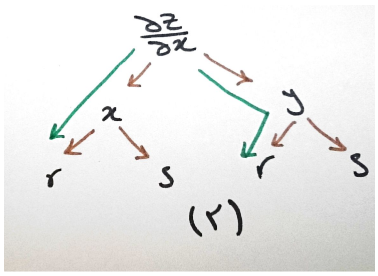
$$\frac{\partial z}{\partial r} = (\frac{\partial z}{\partial x})(۲r) + (\frac{\partial z}{\partial y})(۲s)$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}(۲r) + \frac{\partial z}{\partial y}(۲s)) =$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}۲r)}_{A} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}۲s)}_{B}$$

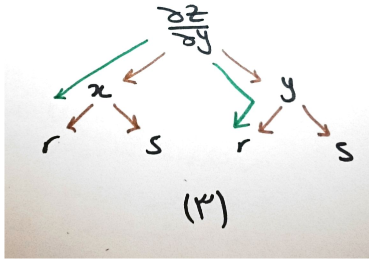
$$A = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x})۲r + ۲\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) \times \frac{\partial y}{\partial r} + ۲\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} \times (۲r) + \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x} \times (۲s) + ۲\frac{\partial z}{\partial x}$$



$$B = ۲s \times \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}) = ۲s \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) \times \frac{\partial y}{\partial r}\right) =$$

$$2s \times \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \times 2r + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \times 2s\right)$$



□

مفهوم دیفرانسیل‌پذیری را می‌توان به توابع سه متغیره نیز تعمیم داد و قواعد دیفرانسیل‌پذیری و قاعده‌ی زنجیره‌ای برای توابع سه متغیره نیز درستند.

$$\omega = f(x, y, z) \quad \omega : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega}{\partial z}dz$$

مثال ۱۳۹. $\frac{\partial u}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

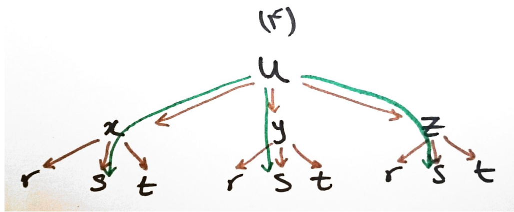
$$u = x^4 y + y^2 z^3$$

$$x = rse^t$$

$$y = rs^2 e^t$$

$$z = r^2 s \sin t$$

پاسخ.



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \dots$$

□

۲.۱۵ مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنید که مقادیر y بر حسب x در طی یک معادله‌ی $F(x, y) = 0$ به طور ضمنی داده شده باشد. چنین معادله‌ای را می‌توان معادله‌ی یک منحنی تراز برای رویه‌ی $z = f(x, y)$ فرض کرد.

توجه ۱۴۰. $z = f(x, y)$ رویه است ولی $f(x, y) = k$ که k یک عدد ثابت است، منحنی تراز رویه در ارتفاع k است.

فرض کنید که بدانیم که y تابعی از x است. پس داریم:

$$F\Big(x,\overset{=y}{f(x)}\Big)=۰$$

داریم

$$dF=۰\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=۰$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx=-\frac{\partial F}{\partial y}dy\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{-F_x}{F_y}$$

قضیه ۱۴۱ (تابع ضمنی). فرض کنید F در یک دیسک شامل (a,b) تعریف شده باشد و $F(a,b)=۰$ و $F_y(a,b)\neq ۰$ و F_x و F_y روی آن دیسک پیوسته باشند. آنگاه از معادله‌ی $F(x,y)=۰$ می‌توان y را به عنوان تابعی از x استخراج کرد و مشتق این تابع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۳۵. فرض کنید که معادله‌ی

$$F(x,y,z)=۰$$

مقادیرِ z را به طور ضمنی بر حسبِ x,y به دست دهد. آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

قضیه ۱۴۲ (قضیه‌ی تابع ضمنی برای توابع سه متغیره). فرض کنید که تابع سه‌متغیره‌ی F در یک کره‌ی شامل نقطه‌ی (a,b,c) تعریف شده باشد و F_x,F_y,F_z هر سه در این کره پیوسته باشند و $F(a,b,c)=۰$ و $F_z(a,b,c)\neq ۰$. آنگاه رابطه‌ی $F(x,y,z)=۰$ متغیرِ z را به صورت تابعی دیفرانسیل‌پذیر از x,y در یک همسایگی نقطه‌ی (a,b,c) به دست می‌دهد و برای این تابع داریم:

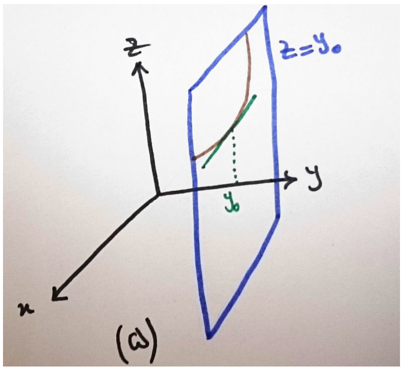
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

۳.۱۵ مشتقات سوئی

گفتیم که برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $y=y_۰$ کافی است از تابعِ زیر بر حسب x مشتق بگیریم:

$$z=f(x,y_۰)$$

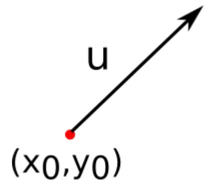
از لحاظ هندسی نیز عبارت بالا را به صورت زیر تحلیل کردیم:



مشتق مورد نظر از عبارت زیر به دست می‌آمد:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\overbrace{f(x_۰+h,y_۰)}^{=f\left((x_۰,y_۰)+h(۱,۰)\right)}-f(x_۰,y_۰)}{h}$$

بنا به عبارتی که در آکولاد بالائی نوشته‌ایم، برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب x از نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ در جهتِ بردارِ $(۱,۰)$ به اندازه‌ی h دور شده‌ایم و تغییرات تابع را اندازه‌گیری کرده‌ایم:



در واقع از یک تابع داده شده می‌توان در جهت هر بردار دلخواهی مشتق گرفت:

فرض کنید $\vec{u}=(a,b)$ یک **بردار یکه** باشد. مشتق سویی تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ در جهت بردار $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+ha,y_۰+hb)-f(x_۰,y_۰)}{h}=D_{\vec{u}}f(x_۰,y_۰)$$

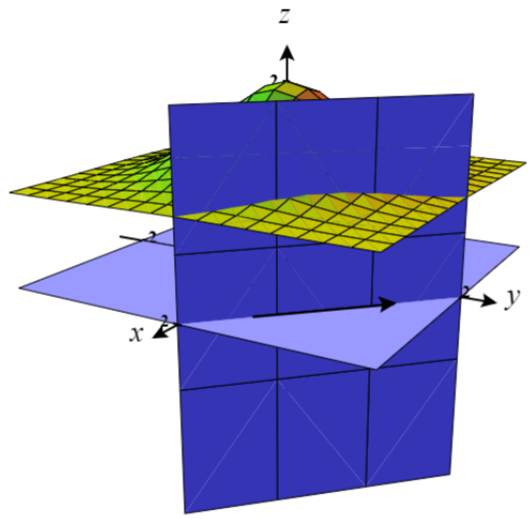
به طور خاص اگر $\vec{u}=(۱,۰)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}}f(x_۰,y_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h,y_۰)-f(x_۰,y_۰)}{h}=f_x(x_۰,y_۰)$$

مشابهاً اگر $\vec{u}=(۰,۱)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}}f(x_۰,y_۰)=f_y(x_۰,y_۰)$$

مشتق سوئی در جهت بردارِ u را به صورت زیر تعبیر هندسی می‌کنیم: صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ در جهت بردار u و موازی محور z را رسم می‌کنیم و شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک این صفحه با رویه را حساب می‌کنیم:



با استفاده از مشتقات سوئی می‌توانیم به بررسی این نکته بپردازیم که تابع ما در جهتهای مختلف، با چه نرخی تغییر می‌کند و در کدام جهت، سریعتر تغییر می‌کند.

۱۶ جلسه‌ی شانزدهم، شنبه

یادآوری ۱۴۳. گفتیم [۱۱] که اگر تابع y تابعی دیفرانسیل‌پذیر بر حسب x باشد و معادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$F(x,y)=۰$$

آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مثال ۱۴۴. فرض کنید y تابعی از x باشد و $x^۳+y^۳=۶xy$؛ آنگاه $y'(x)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$F(x,y)=x^۳+y^۳-۶xy$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=۳x^۲-۶y \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=۳y^۲-۶x$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-۳x^۲+۶y}{۳y^۲-۶x}$$

□

تعمیم ۱۴۵. فرض کنید که z تابعی از x و y باشد و $w=F(x,y,z)=۰$ آنگاه:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}$$

مثال ۱۴۶. $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید، با این فرض که

$$x^۳+y^۳+z^۳+۶xyz-۱=۰$$

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(۳x^۲+۶yz)}{۳z^۲+۶xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\dots$$

□

[۱۱] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

۱.۱۶ ادامه ی مشتق سویی

گفتیم که مشتق سوئی یک تابعِ دو متغیره‌ی $f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_{\cdot},y_{\cdot})$ در جهت بردارِ یکه‌ی $u=(a,b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_u f(x_{\cdot},y_{\cdot})=\lim_{h\to \cdot}\frac{f(x_{\cdot}+ha,y_{\cdot}+hb)-f(x_{\cdot},y_{\cdot})}{h}$$

گفتیم که از لحاظ هندسی، محاسبه‌ی مشتق سوئی در جهت بردار یاد شده، یعنی در نظر گرفتن اشتراک رویه با صفحه‌ی زیر:

$$\begin{cases} y-y_{\cdot}=\frac{b}{a}(x-x_{\cdot}) \\ z=f(x,y)\end{cases}$$

و محاسبه‌ی شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در نقطه‌ی $(x_{\cdot},y_{\cdot},z_{\cdot})$. نیز گفتیم که در جهت دو بردار زیر، مشتقهای سوئی همان مشتقهای جزئی هستند:

$$i=(۱,\cdot)\qquad D_i f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$j=(\cdot,۱)\qquad D_j f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

قضیه ۱۴۷. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی دیفرانسیل پذیر بر حسب x و y باشد. آنگاه مشتق f در جهت هر بردار یکه ی (a,b) موجود است و از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$u=(a,b)\qquad D_u f(x_{\cdot},y_{\cdot})=\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\cdot},y_{\cdot})a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\cdot},y_{\cdot})b$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\cdot},y_{\cdot}),\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\cdot},y_{\cdot})\right)\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right).(a,b)$$

تمرینهای ۵۸ و ۶۰ را ببینید.

اثبات. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(h)=f(x_{\cdot}+ah,y_{\cdot}+bh)$$

داریم

$$g'(\cdot)=\lim_{h\to\cdot}\frac{g(h)-g(\cdot)}{h}=\lim_{h\to\cdot}\frac{f(x_{\cdot}+ah,y_{\cdot}+bh)-f(x_{\cdot},y_{\cdot})}{h}=D_u f(x_{\cdot},y_{\cdot})$$

اما از طرفی

$$g=f(x,y)$$

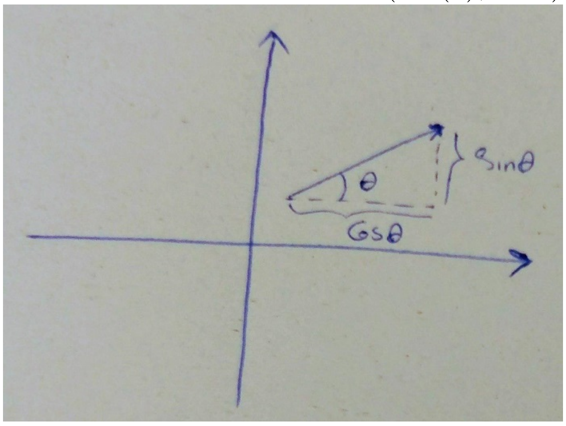
$$x=x_{\cdot}+ha\quad,\qquad y=y_{\cdot}+hb$$

پس

$$g'(\cdot)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\cdot},y_{\cdot})+\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\cdot},y_{\cdot})b$$

□

توجه کنید که هر بردارِ یکه‌ی دوبعدیِ u را می‌توان با توجه به زاویه‌ای که با محور x می‌سازد به صورتِ $u = (\cos(\theta), \sin\theta)$ نشان داد:



در این صورت داریم:

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

مثال ۱۴۸. فرض کنید $f(x,y) = x^۳ - ۳xy + ۴y^۲$ و فرض کنید که u برداری باشد که با محورِ x زاویه‌ی $\theta = \frac{\pi}{۶}$ می‌سازد. مشتق تابع را در جهت این بردار محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\frac{\pi}{۶}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\frac{\pi}{۶}) = (۳x^۲ - ۳y)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۳x + ۸y)(\frac{۱}{۲})$$

□

در طی جلسات گذشته حتماً متوجه شده‌اید که بردارِ $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ در تعاریف مربوط به مشتق ظاهر می‌شود. این **تابع برداری** شایسته‌ی نامی است:

تعریف ۱۴۹. فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، تعریف می کنیم:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j}$$

علامتِ ∇ نابلا خوانده می‌شود و نابلا کلمه‌ای یونانی به معنی سازِ «چنگ» است. تابع بالا را تابع گرادیان می‌خوانیم. توجه کنید که گرادیان یک تابع برداری است. یعنی هر نقطه از $\mathbb{R}^۲$ را به یک بردار در $\mathbb{R}^۲$ می‌برد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$$
$$\nabla : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$$
$$\nabla(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

مثال ۱۵۰. اگر $f(x,y)=\sin x+e^{xy}$ آنگاه

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j}=(\cos x+ye^{xy})\overrightarrow{i}+(xe^{xy})\overrightarrow{j}$$

$$(x,y)\mapsto(\cos x+ye^{xy})\overrightarrow{i}+(xe^{xy})\overrightarrow{j}$$

توجه ۱۵۱. با استفاده از نماد نابلا می‌توان نوشت: (اگر $u=(a,b)$)

$$D_uf=\nabla f.\overrightarrow{u}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}).(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{\partial f}{\partial y}b$$

مثال ۱۵۲. مشتق تابع $f(x,y)=x^۲y^۳-۴y$ را در جهت بردار $\overrightarrow{v}=۲\overrightarrow{i}+۵\overrightarrow{j}$ و در نقطه‌ی $(۲,-۱)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_uf(x_۰,y_۰)=\nabla f(x_۰,y_۰).\overrightarrow{u}$$

$$\nabla f(x_۰,y_۰)=(۲xy^۳,۳x^۲y^۲-۴)$$

$$\nabla f(۲,-۱)=(-۴,۸)$$

$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\overrightarrow{v}}{||v||}=\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}\overrightarrow{i}+\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}\overrightarrow{j}$$

$$D_{(\frac{۲}{\sqrt{۲۹}},\frac{۵}{\sqrt{۲۹}})}f(۲,-۱)=-۴\times\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}+۸\times\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$$

□

توجه ۱۵۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ تابعی سه متغیره باشد. آنگاه $\nabla f:R^۳\to R^۳$ دارای ضابطه‌ی زیر است:

$$(x,y,z)\mapsto(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$$

همچنین اگر $\overrightarrow{u}=(a,b,c)$ یک بردار یکه باشد، تعریف می کنیم:

$$D_uf=\nabla f.\overrightarrow{u}$$

مثال ۱۵۴. مشتق تابع $f(x,y,z)=x\sin(yz)$ را در جهت بردار $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+۲\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ در نقطه ی $(۱,۳,۰)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\nabla f(x_۰,y_۰,z_۰)=(\sin(y_۰z_۰),x_۰z_۰\cos(y_۰z_۰),x_۰y_۰\cos(y_۰z_۰))$$

$$\nabla f(۱,۳,۰)=(\sin(۰),۰\times\cos(۰),۳\times\cos(۰))=(۰,۰,۳)$$

$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\overrightarrow{v}}{||v||}=\frac{\overrightarrow{i}+۲\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{\sqrt{۱+۴+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{i}+\frac{۲}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{j}-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\overrightarrow{k}$$

$$D_uf(۱,۳,۰)=(۰,۰,۳).(\frac{۱}{\sqrt{۶}},\frac{۲}{\sqrt{۶}},-\frac{۱}{\sqrt{۶}})=۰+۰-\frac{۳}{\sqrt{۶}}=-\frac{۳}{\sqrt{۶}}$$

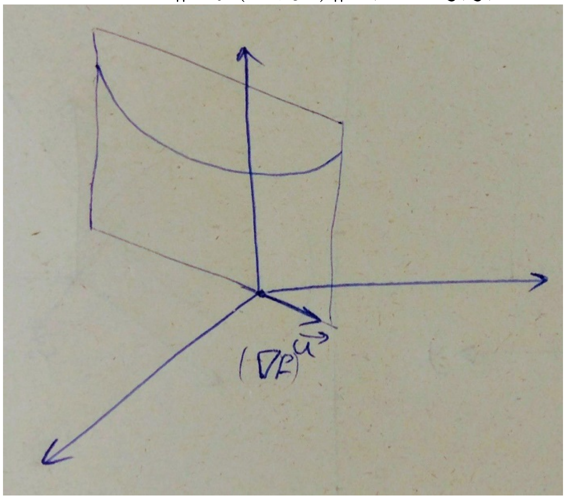
□

توجه ۱۵۵. فرض کنید f (دو متغیره یا سه متغیره) تابعی دیفرانسیل پذیر باشد. گفتیم که:

$$D_u f(x_۰, y_۰) = \nabla f(x_۰, y_۰).\overrightarrow{u} = ||\nabla f(x_۰, y_۰)||.||\overrightarrow{u}||.\cos\theta$$

(θ زاویه ی بین و ∇f و $\overrightarrow{u}$ است.)

بنابراین حداکثر مقدار D_u زمانی روی می دهد که $\cos\theta = ۱$؛ یعنی زمانی که $\overrightarrow{u}$ در جهت بردار گرادیان باشد؛ و این مقدار برابر است با: $\|\nabla f(x_۰, y_۰)\|$



مثال ۱۵۶.

الف) نرخ تغییرات تابع $f(x, y) = xe^y$ را وقتی از نقطه ی $(۲, ۰)$ به سمت نقطه ی $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ حرکت می کنیم، بیابید.

ب) در کدام جهت تابع حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار چقدر است؟

پاسخ.

$$\overrightarrow{v} = (\frac{۱}{۲} - ۲, ۲ - ۰) = (-\frac{۳}{۲}, ۲)$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = \frac{(\frac{-۳}{۲}, ۲)}{\sqrt{\frac{۹}{۴} + ۴}} = \frac{(\frac{-۳}{۲}, ۲)}{\frac{۵}{۲}} = (\frac{-۳}{۵}, \frac{۴}{۵})$$

$$\nabla f(x_۰, y_۰) = (e^{y_۰}, x_۰ e^{y_۰})$$

$$\nabla f(۲, ۰) = (۱, ۲)$$

$$D_u f(۲, ۰) = \nabla f.\overrightarrow{u} = (۱, ۲).(\frac{-۳}{۵}, \frac{۴}{۵}) = \frac{-۳}{۵} + \frac{۸}{۵} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

تابع در جهت بردار $(۱, ۲)$ حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار برابر است با: $\sqrt{۴ + ۱}$. □

۱۷ جلسه‌ی هفدهم، دوشنبه

۱.۱۷ حل چند تمرین

تمرین ۳۶. تابع f را همگن از درجه‌ی n می خوانیم هرگاه f مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد و

$$\forall t \quad f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

الف) نشان دهید که تابع زیر همگن از درجه‌ی ۳ است.

$$f(x,y) = x^۲y + ۲xy^۲ + ۵y^۳$$

پاسخ.

$$f(x,y) = x^۲y + ۲xy^۲ + ۵y^۳$$

$$f(tx,ty) = t^۳(x^۲y + ۲xy^۲ + ۵y^۳)$$

$$f(tx,ty) = t^۳ f(x,y)$$

□

ب) اگر f همگن از درجه ی n باشد ، نشان دهید که

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

پاسخ. از آنجا که f همگن است داریم:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

پس، بنا به قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial f}{\partial \text{مولفه‌ی‌اول}}\frac{\partial \text{مولفه‌ی‌اول}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \text{مولفه‌ی‌دوم}}\frac{\partial \text{مولفه‌ی‌دوم}}{\partial t} = nt^{n-۱}f(x,y)$$

پس:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) \times x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \times y = nt^{n-۱}f(x,y)$$

برای رسیدن به معادله‌ی حکم سوال، تغییر متغیر زیر را در نظربگیرید:

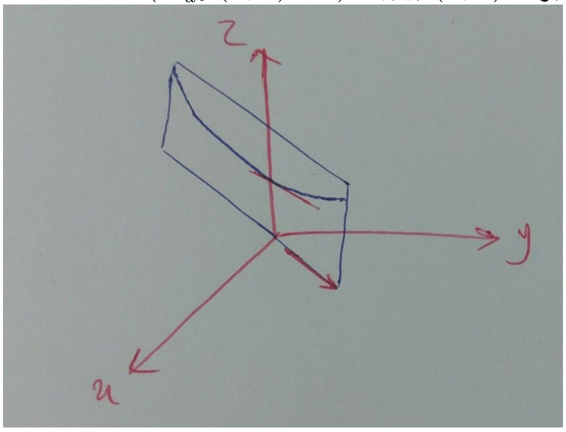
$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \times \frac{u}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \times \frac{v}{t} = nt^{n-۱}f(\frac{u}{t},\frac{v}{t})$$

در t ضرب می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \times u + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \times v = nt^{n-۱}f(\frac{u}{t},\frac{v}{t}) = nf(t\times\frac{u}{t}, t\times\frac{v}{t}) = nf(u,v)$$

و حکم در اینجا ثابت می‌شود. □

تمرین ۳۷. اگر $f(x,y) = xe^{۲y}$ مشتقات جزئی مرتبه ی دوم پیوسته داشته باشد، مشتق سوئی دوم این تابع را در جهت بردار $(۴,۶)$ بیابید. $(D_u^۲ f(۴,۶) = ?)$



توجه ۱۵۷. فرض کنید $f(x,y)$ و $u = (a,b)$ داریم:

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b$$

$$D_u^۲ f(x,y) = D_u[\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b] = D_u(\frac{\partial f}{\partial x}a) + D_u(\frac{\partial f}{\partial y}b) =$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}a^۲ + \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}ab + \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}ab + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}b^۲ =$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}a^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}ab + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}b^۲$$

توجه کنید که در قسمت آخر از این فرض استفاده کرده‌ایم که مشتقات جزئی دوم تابع مورد نظر پیوسته‌اند.

با استفاده از توجه بالا تمرین را حل کنید. توجه کنید که باید بردار داده شده را تبدیل به یک بردار یکه کنید.

تمرین ۳۸. آیا تابع زیر در مبدأ پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq ۰ \\ ۱ & xy = ۰ \end{cases}$$

پاسخ. ادعا می کنیم که تابع بالا در نقطه‌ی $(۰,۰)$ پیوسته است. باید نشان دهیم که:

$$\forall \epsilon > ۰ \exists \delta > ۰ \forall (x,y)(۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta \to |f(x,y) - ۱| < \epsilon]$$

توجه ۱۵۸. در نقاط نزدیک به صفر اگر تابع از ضابطه ی دوم پیروی کند، همواره داریم:

$$|f(x,y) - ۱| = |۱ - ۱| < \epsilon$$

پس تنها (x,y) هایی را در نظر می گیریم که $xy \neq ۰$ داریم:

$$|\frac{\sin(xy)}{xy} - ۱| = |\frac{\sin(xy) - xy}{xy}|$$

بسط تیلور:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۵}{۵!} - ...$$

ادعا: برای هر $x > ۰$ داریم:

$$x - \sin x < \frac{x^۳}{۶}$$

این ادعا را با روشهایی که در درس ریاضی ۱ فراگرفته‌اید ثابت کنید.

بنا به ادعای بالا:

$$\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|} \leq \frac{|x^۳y^۳|}{۳۶|xy|} \leq \frac{x^۲y^۲}{۳۶}$$

اگر $\delta < \sqrt[۴]{۶\epsilon}$ آنگاه اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ آنگاه:

$$|f(x,y) - ۱| < \epsilon$$

□

تمرین ۳۹. فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۴+y^۴}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

در این صورت $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰,۰)$ را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰+h,۰) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(h,۰) - ۰}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\frac{h^۴}{h^۲}}{h} = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{۴x^۳(x^۲+y^۲) - ۲x(x^۴+y^۴)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f_x(h,۰) - f_x(۰,۰)}{h} = ...$$

ادامه دادن راه حل بالا را به عهده‌ی شما نهاده‌ایم. □

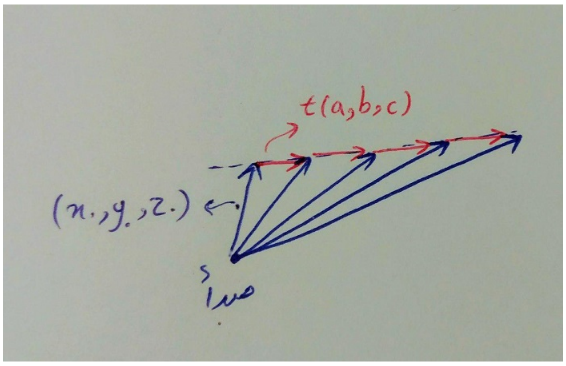
۲.۱۷ منحنی‌های فضایی

فرض کنید $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$ یک تابع برداری باشد. چنین تابعی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

هر تابع به صورت بالا، یک «منحنی فضائی» را پارامتر بندی می‌کند. یک نمونه از منحنی‌های فضائی، خط مستقیم است:

$$\overrightarrow{r}(t) = (x_۰ + at, y_۰ + bt, z_۰ + ct) = (x_۰, y_۰, z_۰) + t(a,b,c)$$

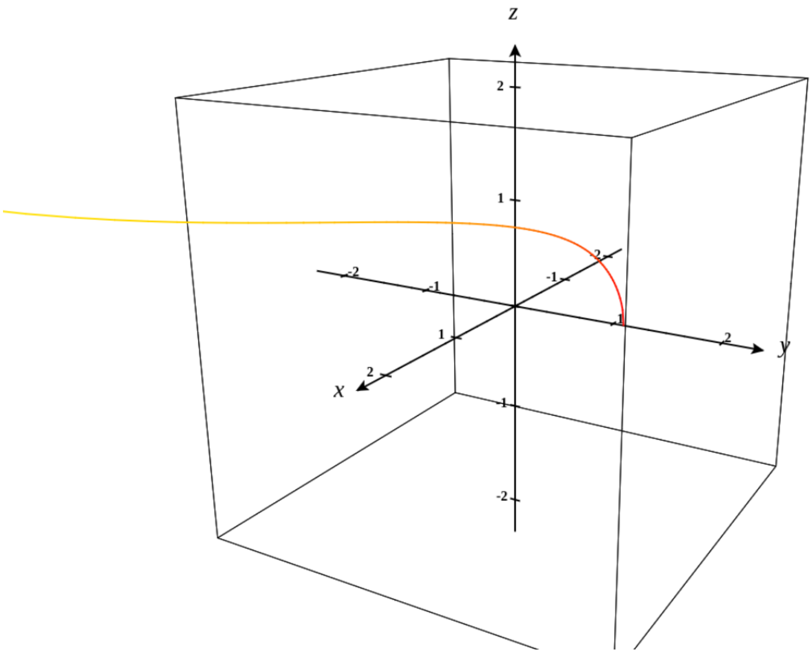


در زیر مثالهای دیگری از منحنی‌های فضائی آورده‌ایم:

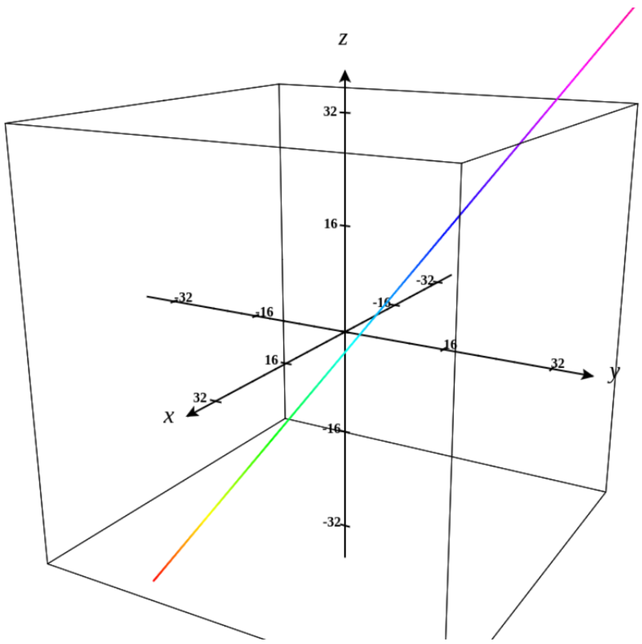
مثال ۱۵۹.

$$\overrightarrow{r}(t) = (t^{۳}, \ln(۳ - ۲t), \sqrt{t})$$

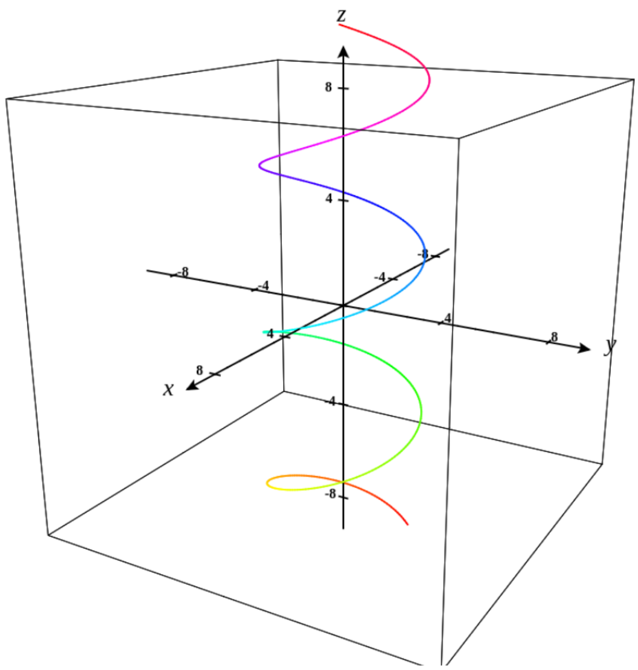
در زیر این منحنی را برای $۰ \leq t \leq ۱۰$ رسم کرده‌ایم:



$$\overrightarrow{r}(t) = (۱ + t, ۲ + ۵t, -۱ + ۶t)$$



$$\overrightarrow{r}(t) = (۲\sin t, ۲\cos t, t)$$

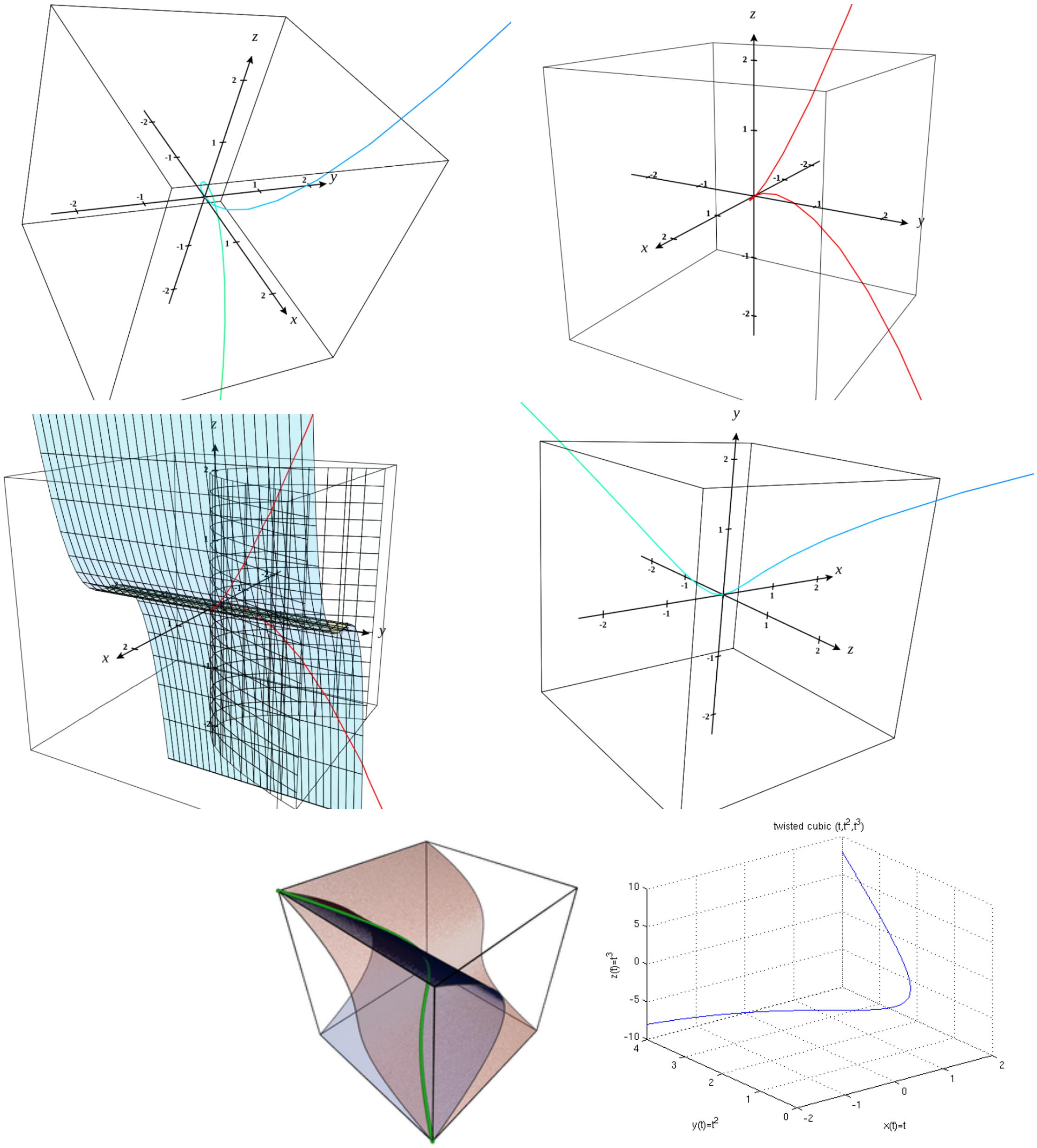


دقت کنید که منحنی بالا روی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ واقع است.

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$$

این منحنیِ فضائی، منحنیِ مکعبی پیچانده‌شده نام دارد و در واقع اشتراک رویه‌های زیر است:

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ z = x^۳ \end{cases}$$


twisted cubic (t,t^2,t^3)
z(t)=t^3
y(t)=t^2
x(t)=t

۱۸ نیم جلسه‌ی هجدهم، چهارشنبه

۱.۱۸ حل چند تمرین

تمرین ۴۰. فرض کنید $w = xy + yz + zx$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و $z = r\theta$. آنگاه $\frac{\partial w}{\partial r}$ را در $r = ۲$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = (y+z)\cos\theta + (x+z)\sin\theta + (x+y)\theta$$

در نقطه‌ی $(r,\theta) = (۲, \frac{\pi}{۲})$ داریم

$$\frac{\partial w}{\partial r}(۲, \frac{\pi}{۲}) = (۲\sin\frac{\pi}{۲} + \pi)\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + (۲\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + \pi)\sin(\frac{\pi}{۲}) + (۲\cancelto{۰}{\cos(\frac{\pi}{۲})} + ۲\sin(\frac{\pi}{۲}))\frac{\pi}{۲}$$
$$= ۲\pi\sin(\frac{\pi}{۲}) = ۲\pi$$

□

تمرین ۴۱. گیریم که ضابطه‌ی ضمنی زیر میان x, y برقرار باشد.

$$y\cos x = x^۲ + y^۲$$

حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

پاسخ.

$$F(x,y) = y\cos x - x^۲ - y^۲ = ۰$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y\sin x - ۲x \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos x - ۲y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x + ۲x}{\cos x - ۲y}$$

□

تمرین ۴۲. فرض کنید که مقادیر x, y در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$\tan^{-۱}(x^۲ y) = x + xy^۲$$

حاصل $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

توجه ۱۶۰.

$$۱)\quad F(x,y,z)=۰\Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\cancelto{۱}{\frac{\partial x}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial y}\times\cancelto{۰}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=۰\Rightarrow\qquad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$۲)\quad F(x,y)=۰\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۴۳. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و $y^z+x\ln(y)=z^۲$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$F(x,y,z)=yz+x\ln y-z^۲=۰$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=y-۲z\quad,\quad\frac{\partial F}{\partial x}=\ln y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\ln y}{y-۲z}$$

□

تمرین ۴۴. فرض کنید
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$
نشان دهید که $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)\neq\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$

پاسخ. در نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۰)$ مشتق سوئی را باید با استفاده از تعریف محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=۰$$

حال در نقاطِ $(x,y)\neq(۰,۰)$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(y(x^۲-y^۲)+۲x^۲y)(x^۲+y^۲)-۲x^۲y(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{(y(x^۲-y^۲)+۲x^۲y)(x^۲+y^۲)-۲x^۲y(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

پس:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f_x(۰,۰+h)-f_x(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{h(-h^۲)h^۲}{h^۵}=-۱$$

ادامه‌ی حل سوال به عهده‌ی شما. □

۲.۱۸ ادامه‌ی درس (خم‌ها)

گفتیم که هر تابع برداری به صورت

$$\overrightarrow{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$$

یک خم را در فضا مشخص می‌کند.

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

مثال ۱۶۱. منحنی محل تلاقی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $y + z = ۲$ را پارامتربندی کنید و معادله‌ی برداری آن را نیز بنویسید.

پاسخ. می‌خواهیم معادله ای مانند $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ برای خم به وجود آمده از تلاقی دو رویه بنویسیم.تصویر خم روی صفحه‌ی xy همان سطح مقطع استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه‌ی xy است. پس می‌توان نوشت:

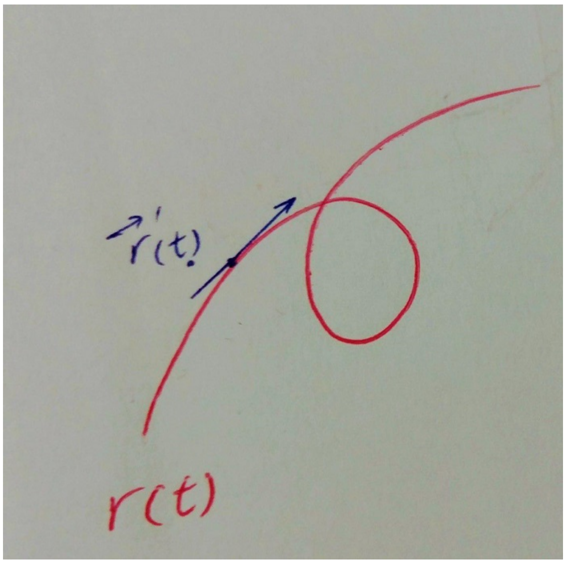
$$\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, ۲ - \sin t)$$

□

مثال ۱۶۲. معادله‌ی $\frac{x^۲}{۲} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ را پارامتر بندی کنید.

$$\overrightarrow{r}(t) = (\sqrt{۲}\cos t, ۲\sin t)$$

توجه ۱۶۳. اگر $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ آنگاه بردار مماس بر منحنی $r(t)$ در زمان $t_۰$ به صورت $\overrightarrow{r}'(t_۰) = (x'(t_۰), y'(t_۰), z'(t_۰))$ است. این مطلب را در جلسات آینده دوباره توضیح خواهیم داد.



از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۹ جلسه‌ی نوزدهم شنبه

۱.۱۹ مرور درس های گذشته

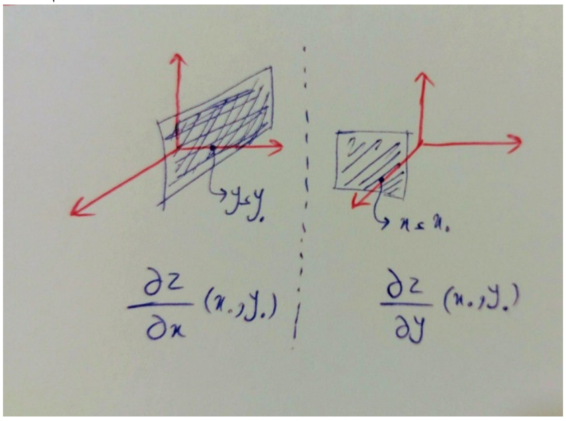
گفتیم که منظور از یک **تابع دو متغیره**، تابعی مانند $z = f(x, y)$ است از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$.

مشتقات ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند. مفاهیم بالا را به صورت زیر تعبیر هندسی کردیم.



وجود $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ تضمین کننده‌ی دیفرانسیل پذیری و حتی پیوستگی نیست.

دیفرانسیل کلی تابع:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

گفتیم که دیفرانسیل کلی، از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد. (با رسم تصویری، فرمول بالا را برای خود تعبیر کنید).

گرادیان:

$$\nabla f = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$$

مشتق سوئی: نیز دیدیم که مشتق سوئی تابع در جهت بردارِ u به صورت زیر محاسبه می‌شود:

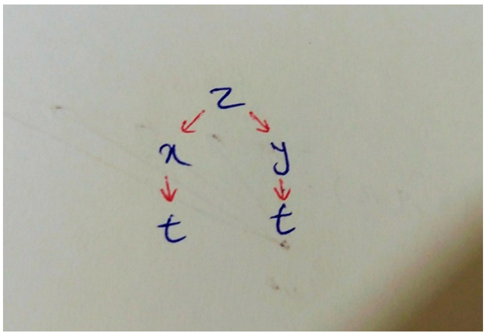
$$D_u f = \overrightarrow{\nabla f}.\overrightarrow{u}$$

مشتق سوئي در جهت بردار گرادیان حداکثر می شود و حداکثر میزان تغییرات تابع در آن جهت برابر است با $|\nabla f|$ توجه کنید که اگر $z = f(h_1(x, y), h_2(x, y))$ آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial h_1}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(h_1(x, y))$$

در واقع مشتق ضمنی بر حسب x یعنی مشتق ضمنی بر حسب مؤلفه‌ی اولِ تابع.

مشتق تابع مرکب:



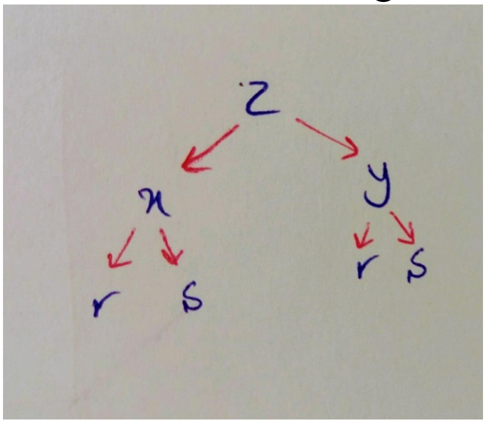
$$z = f(x,y)$$

$$y = h(t) \quad , \quad x = g(t)$$

$$z = f(g(t), h(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مشتق تابع مرکب (جزئی):



$$z = f(x,y)$$

$$x = g_۱(r,t) \quad y = g_۲(r,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

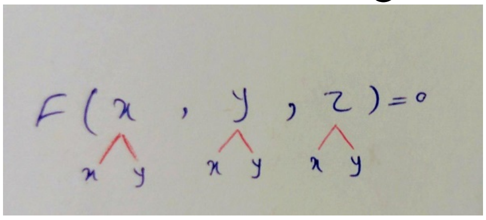
مشتق تابع ضمنی(دو متغیره):

اگر $z = F(x,y) = ۰$ آنگاه:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مشتق تابع ضمنی(سه متغیره):



اگر $w = F(x,y,z) = ۰$ آنگاه

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{۱}{\frac{\partial x}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{۰}{\frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

تمرین ۴۵. اگر $\cos(xyz) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(xz\sin(xyz) + ۲y)}{-xy\sin(xyz) - ۲z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(zy\sin(xyz) + ۲x)}{-xy\sin(xyz) - ۲z}$$

□

تمرین ۴۶. فرض کنید که دما در هر نقطه توسط رابطه‌ی زیر داده شده باشد، در نقطه‌ی $(۱,۱,-۲)$ در کدام جهت دما سریعتر افزایش می یابد؟

$$T(x,y,z) = \frac{۸۰}{۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

پاسخ. هر تابعی در هر نقطه در جهت بردار گرادیان حداکثر نرخ افزایش را داراست.

$$\nabla T = (\frac{-۲x \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲}, \frac{-۲y \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲}, \frac{-۲z \times ۸۰}{(۱ + x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲})$$

$$\nabla T(۱,۱,-۲) = (\frac{-۱۶۰}{۷^۲}, \frac{-۱۶۰}{۷^۲}, \frac{۳۲۰}{۷^۲})$$

□

تمرین ۴۷. نرخ تغییرات تابع را در جهت بردار بالا محاسبه کنید. $?(||\nabla T||)$

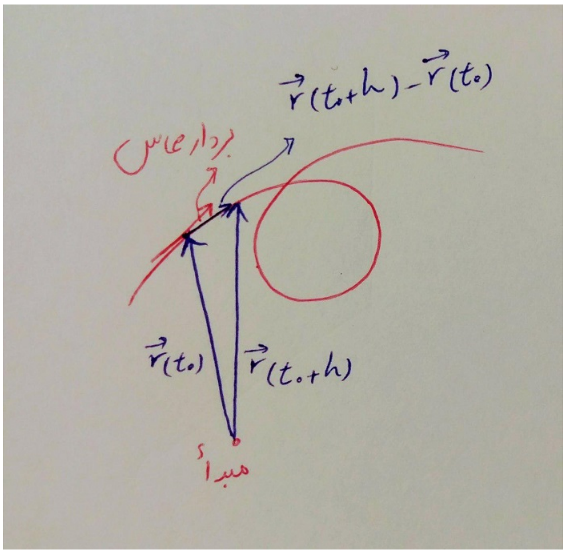
۲.۱۹ ادامه‌ی درس

فرض کنید

$$\overrightarrow{r}(t) : (f(t), g(t), h(t))$$

معادله‌ی برداری یک خم باشد. دقت کنید که در رسم خم‌ها، مؤلفه‌ی t را رسم نمی‌کنیم. حال در $t = t_۰$ تعریف می‌کنیم:

$$\overrightarrow{r'}(t_۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{\overrightarrow{r}(t_۰ + h) - \overrightarrow{r}(t_۰)}{h} = (f'(t), g'(t), h'(t))$$



همان طور که در تصویر بالا مشاهده می‌کنید، $r'(t_\circ)$ در واقع جهت بردار مماس بر خم را در نقطه‌ی $P = \overrightarrow{r}(t_\circ)$ مشخص می‌کند.

تمرین ۴۸. منحنی های زیر روی یک رویه‌ی S واقعند و از نقطه‌ی $(۲, ۱, ۳)$ واقع بر آن روی می گذرند. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بنویسید.

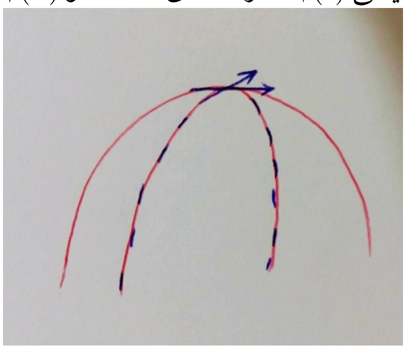
$$\overrightarrow{r_۱}(t) = (۲ + ۳t, ۱ + t^۲, ۳ - ۴t + t^۳)$$

$$\overrightarrow{r_۲}(u) = (۱ + u^۲, ۲u^۳ - ۱, ۲u + ۱)$$

پاسخ. نخست توجه کنید که

$$\overrightarrow{r_۱}(۰) = (۲, ۱, ۳) \quad , \quad \overrightarrow{r_۲}(۱) = (۲, ۱, ۳)$$

یعنی $\overrightarrow{r_۱}(t)$ در نقطه‌ی $t = ۰$ و $\overrightarrow{r_۲}(u)$ در نقطه‌ی $u = ۱$ به نقطه‌ی $(۲, ۱, ۳)$ می‌رسند:



$$\overrightarrow{r'_۱}(t) = (۳, ۲t, -۴ + ۲t) \quad \Longrightarrow \overrightarrow{r'_۱}(۰) = (۳, ۰, -۴)$$

$$\overrightarrow{r'_۲}(u) = (۲u, ۶u^۲, ۲) \Longrightarrow \overrightarrow{r'_۲}(۱) = (۲, ۶, ۲)$$

دو بردارِ $\overrightarrow{r'_۱}(۰), \overrightarrow{r'_۲}(۱)$ هر دو روی صفحه‌ی مماس مورد نظر واقعند. پس بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر از حاصلضرب

خارجی آنهاست:

$$\overrightarrow{n} = (۳, ۰, -۴) \times (۲, ۶, ۲) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۰ & -۴ \\ ۲ & ۶ & ۲ \end{vmatrix} = ۲۴\overrightarrow{i} - ۱۴\overrightarrow{j} + ۱۸\overrightarrow{k} = (۲۴, -۱۴, ۱۸)$$

پس معادله‌ی صفحه مورد نظر به صورت زیر است:

$$۲۴x - ۱۴y + ۱۸z = ۲۴ \times ۲ - ۱۴ \times ۱ + ۱۸ \times ۳ = ۸۸$$

که به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$\Longrightarrow ۲۴x - ۱۴y + ۱۸z - ۸۸ = ۰$$

□

۳.۱۹ صفحات مماس بر رویه های تراز

در درسهای گذشته دیدیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد (که یک رویه را مشخص می‌کند) آنگاه معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ بر رویه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$z - z_۰ = f_x(x - x_۰) + f_y(y - y_۰)$$

در اینجا می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه را پیدا کنیم که توسط یک معادله‌ی ضمنی به صورتِ $F(x, y, z) = ۰$ داده شده باشد.

فرض کنید $w = F(x, y, z)$ تابعی سه متغیره باشد. همان طور که در درسهای پیشین دیدیم، هر معادله به صورت $F(x, y, z) = k$ یک **رویه‌ی تراز** از این تابع را بدست می دهد. پس فرض کنید $F(x, y, z) = k$ یک رویه تراز باشد و $\overrightarrow{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ یک خم واقع بر این رویه باشد. از آنجا که $\overrightarrow{r}(t)$ روی رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ واقع شده است، داریم:

$$F(f(t), g(t), h(t)) = k$$

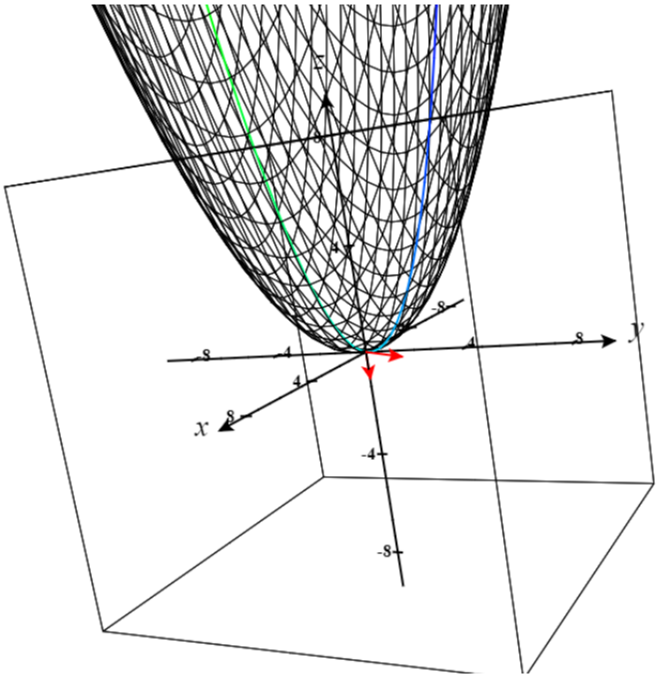
از عبارت بالا بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} g'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} h'(t) = ۰$$

پس در هر نقطه‌ی $P = r(t_۰)$ داریم:

$$\overrightarrow{\nabla F}(p).\overrightarrow{r'}(t_۰) = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{\nabla F}(p) \perp \overrightarrow{r'}(t_۰)$$

بنابراین برای هر منحنی $\overrightarrow{r}(t)$ بردار $\nabla F(p)$ بر $\overrightarrow{r}(t)$ در نقطه ی p عمود است. پس $\nabla F(p)$ بر صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ در نقطه‌ی p عمود است.



نتیجه ۱۶۴. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x,y,z)=k$ در نقطه‌ی $p=(x_0,y_0,z_0)$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(p)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(p)(z-z_0)=0$$

بطور خاص اگر $z=f(x,y)$ آنگاه می توان نوشت:

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$-f_x(x-x_0)-f_y(y-y_0)+1(z-z_0)=0$$

یعنی:

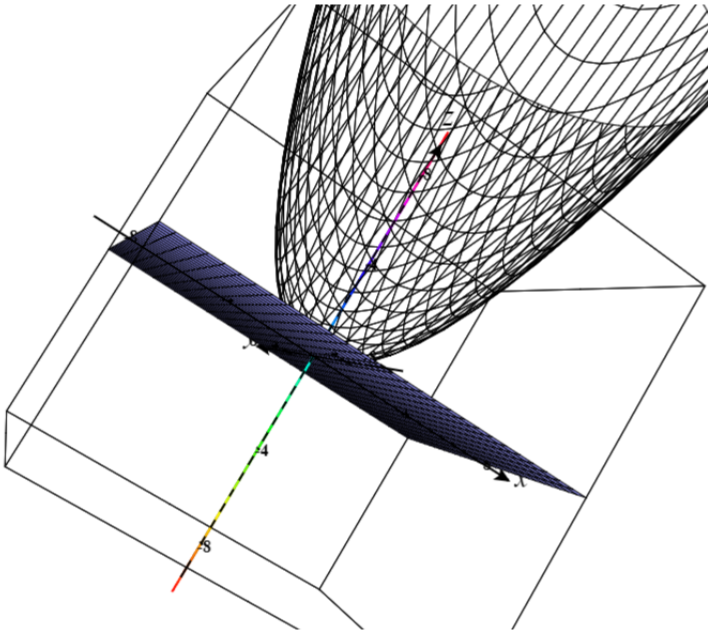
$$z-z_0=f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$$

و این بر آنچه قبلاً ثابت کرده‌ایم نیز مطابقت دارد.

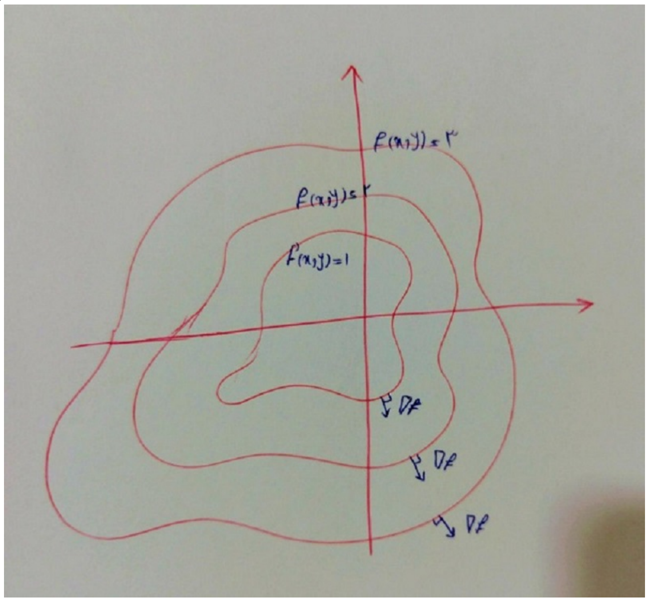
تعریف ۱۶۵. به خطی که در جهت عمود بر یک رویه از نقطه‌ی p بگذرد، **خط نرمال** بر آن رویه گفته می‌شود.

پس اگر $F(x,y,z)=0$ معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر باشد، معادله‌ی خط نرمال آن در نقطه‌ی p به صورت زیر است:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(p)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(p)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}$$



توجه کنید که به طور مشابه اگر $F(x,y) = k$ یک معادله‌ی دو متغیره باشد (که یک منحنی تراز از یک رویه را نشان می‌دهد) آنگاه $\nabla f = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ در نقطه‌ی (x,y) بر منحنیِ $F(x,y) = k$ عمود است:



از طرفی گفتیم که ∇ در هر نقطه، جهتی را نشان می‌دهد که تابع در آن جهت سریعتر افزایش می‌یابد. در واقع اگر نقشه‌ی توپوگرافیک یک کوه را داشته باشیم (فرض کنیم به صورت بالا)، آنگاه با استفاده از بردار گرادیان می‌توانیم پرشیبترین مسیر میان دو ارتفاع مشخص را پیدا کنیم. این مسیر بر تمام منحنی‌های $f(x,y) = k$ عمود است.

مثال ۱۶۶. معادلات صفحه‌ی مماس و خط نرمال را بر بیضی‌وار $\frac{x^۲}{۴} + y^۲ + \frac{z^۲}{۹} = ۳$ در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۳)$ بنویسید.

پاسخ. صفحه‌ی مماس:

$$F_x(x - x.) = F_y(y - y.) + F_z(z - z.) = ۰$$

$$\frac{x.}{۲}(x - x.) + ۲y.(y - y.) + \frac{۲z.}{۹} = ۰$$

$$(x - ۲) + ۲(y - ۱) - \frac{۶}{۹}(z + ۳) = ۰$$

خط نرمال:

$$\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۳}{-\frac{۶}{۹}}$$

$\square$

از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۲۰ جلسه‌ی بیستم، دوشنبه، حل چند تمرین

تمرین ۴۹. فرض کنید $f(x,y)=y^2-x^2$. آنگاه ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

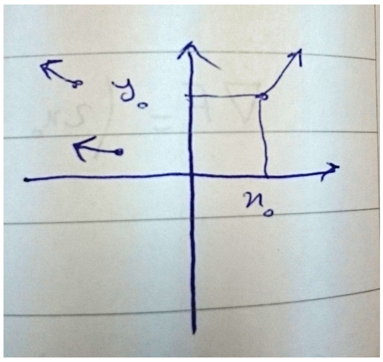
$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$$

$$\nabla f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$$

$$(x_0,y_0)\mapsto\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

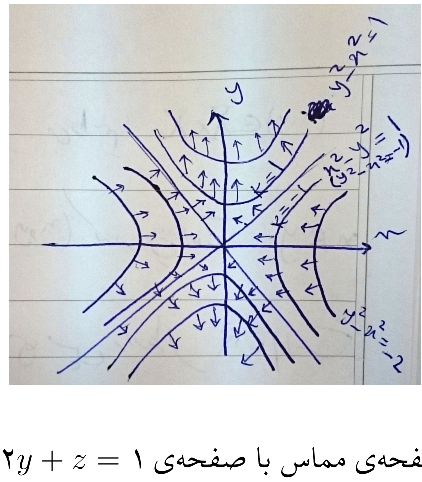
$$\nabla(x_0,y_0)=(-2x_0,2y_0)$$

$$(x_0,y_0)\mapsto(-2x_0,2y_0)$$



توجه ۱۶۷. $\nabla f(x_0,y_0)$ بر منحنی تراز $f(x,y)=k$ در نقطه‌ی (x_0,y_0) عمود است (در صورتی که $f(x_0,y_0)=k$). همچنین $\nabla f(x_0,y_0)$ در جهت افزایش تابع است.

توجه ۱۶۸. (در حالت سه‌متغیره) اگر $\omega=f(x,y,z)$ آنگاه $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ بر هر رویه‌ی تراز $F(x,y,z)=k$ که از (x_0,y_0,z_0) بگذرد در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) عمود است.

بنا به توجه‌های بالا، شکل مورد نظرِ سوال، به صورت زیر است:  $\square$

تمرین ۵۰. در کدام نقطه روی بیضی‌وار $x^2+y^2+2z^2=1$ صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $x+2y+z=1$ موازی است؟

پاسخ. بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر بیضی‌وار $x^2+y^2+2z^2=1$ در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) برابر است با

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,4z_0)$$

هدف ۱۶۹. یافتن نقاطی مانند (x_0, y_0, z_0) روی بیضی‌وار مورد نظر به طوری که $(1, 2, 1) || (2x_0, 2y_0, 4z_0)$.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \\ \frac{2x_0}{1} = \frac{2y_0}{2} = 4z_0 \end{cases}$$

حل معادله‌ی بالا و ادامه‌ی پاسخ سوال به عهده‌ی شما! □

تمرین ۵۱. نشان دهید که بیضی‌وار $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ و کُره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ در نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ بر هم مماسند.

پاسخ.

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

کافی است نشان دهیم که در نقطه‌ی یادشده، $\nabla F(x_0, y_0, z_0) || \nabla G(x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (6x_0, 4y_0, 2z_0)$$

$$\nabla G(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 - 8, 2y_0 - 6, 2z_0 - 8)$$

$$\frac{6x_0}{2x_0 - 8} = \frac{4y_0}{2y_0 - 6} = \frac{2z_0}{2z_0 - 8} \quad (*)$$

کافی است بررسی کنیم که نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ در $(*)$ صدق می‌کند. (بررسی کنید). □

تمرین ۵۲. نشان دهید که صفحات مماس بر مخروطِ $x^2 + y^2 = z^2$ همه از مبدأ مختصات می‌گذرند.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) دارای معادله‌ی زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$$

کافی است نشان دهیم نقطه‌ی $(0, 0, 0)$ در معادله‌ی صفحه‌ی مماس صدق می‌کند (ادامه با شما!) □

تمرین ۵۳. نشان دهید که هر خط عمود بر کُره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.

پاسخ. معادله‌ی خط نرمال بر کره در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{z_0}$$

حال نشان می‌دهیم که همه‌ی خطهای به معادله‌ی بالا از مبدأ می‌گذرند (یعنی مبدأ در معادله‌ی این خطها صدق می‌کند).

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

□

تمرین ۵۴. صفحه‌ی $y+z=۳$ استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۵$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر این بیضی را در صفحه‌ی یاد شده در نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ بنویسید.

پاسخ. راه حل اول:

توجه ۱۷۰. خط مورد نظر هم روی صفحه‌ی مماس بر استوانه در نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ واقع است و هم روی صفحه‌ی $y+z=۳$.

پس بردار خط مورد نظر بر بردارهای نرمال دو صفحه یاد شده عمود است. بردارِ نرمال صفحه‌ی اول برابر است با $(۰,۱,۱)$ و بردار نرمال صفحه‌ی مماس برابر است با

$$\nabla F(x_۰,y_۰,z_۰)|_{(۱,۲,۱)}=(۲x_۰,y_۰,۰)|_{(۱,۲,۱)}=(۲,۴,۰)$$

پس بردار خط مورد نظر برابر است با

$$(۰,۱,۱)\times(۲,۴,۰)=(a,b,c) \quad \text{(محاسبه به عهده‌ی شما)}$$

و معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$\frac{x-۱}{a}=\frac{y-۲}{b}=\frac{z-۱}{c}$$

پاسخ دوم. بیضی مورد نظر را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(\sqrt{۵}\cos t,\sqrt{۵}\sin t,۳-\sqrt{۵}\sin t\right)$$

نقطه‌ی $(۱,۲,۱)$ به ازای

$$t=\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۵}})$$

حاصل می‌شود. جهت خط مماس برابر است با جهت بردار

$$\overrightarrow{r}'(t)=\dots$$

□

تمرین ۵۵. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنیِ محل اشتراک سهمی‌وارِ $z=x^۲+y^۲$ و بیضی‌وارِ $۴x^۲+y^۲+z^۲=۹$ را در نقطه‌ی $(-۱,۱,۲)$ بنویسید.

پاسخ. خط مورد نظر هم بر صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار و هم بر صفحه‌ی مماس بر بیضی‌وار واقع است.

$$\overrightarrow{n_۱}=(-۲,۲,-۱) \quad \text{نرمال سهمی‌وار}$$

$$\overrightarrow{n_۲}=(-۸,۲,۴) \quad \text{نرمال بیضی‌وار}$$

بردار خط مورد نظر برابر است با

$$\overrightarrow{n_۱}\times\overrightarrow{n_۲}=(a,b,c) \quad \text{محاسبه به عهده‌ی شما}$$

معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{x+۱}{a}=\frac{y-۱}{b}=\frac{z-۲}{c}$$

(ادامه با شما!) $\square$

مثال ۱۷۱. نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{(x+y)^۳} & x+y\neq ۰\\ ۰ & x+y=۰\end{cases}$$

پاسخ. اگر تابع در مبدأ پیوسته باشد باید از هر مسیری که (x,y) به مبدأ میل می‌کند تابع به $f(۰,۰)$ میل کند. روی مسیر $(۰,y)$ داریم:

$$f(۰,y)=\frac{-۱}{y^۲}$$

$$\lim_{\begin{cases}(x,y)\to(۰,۰)\\ x=۰\end{cases}} f(x,y)=$$

$$\lim_{y\to ۰}\frac{-۱}{y^۲}=-\infty$$

پس تابع مورد نظر پیوسته نیست. $\square$

توجه. این مطالب را جناب آقای دکتر بهرامی دربارهی بسط تیلور توابع دو متغیره نوشته و در اختیار کلاس ما قرار داده‌اند. هر چند یادگرفتن آنها برای امتحان، ضروری نیست، خواندنشان را اکیداً توصیه می‌کنم.

بسط تیلور توابع چندمتغیره

ابتدا مفهوم بسط تیلور را برای توابع حقیقی یک متغیره یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم ϕ تابعی حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای از اعداد حقیقی حاوی دو عدد $t_۰$ و t باشد. اگر مشتق مرتبه $(n+۱)$ـ ام ϕ بر این بازه پیوسته باشد آنگاه عدد c بین $t_۰$ و t وجود دارد که

$$\phi(t)=\phi(t_۰)+\phi'(t_۰)(t-t_۰)+\frac{\phi''(t_۰)}{۲!}(t-t_۰)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(t_۰)}{n!}(t-t_۰)^n+\frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(t-t_۰)^{n+۱}$$

به این ترتیب برای مقادیر t به اندازه کافی نزدیک $t_۰$،

$$\phi(t)\approx\phi(t_۰)+\phi'(t_۰)(t-t_۰)+\frac{\phi''(t_۰)}{۲!}(t-t_۰)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(t_۰)}{n!}(t-t_۰)^n$$

در قضیهٔ زیر این خاصیت را برای توابع دومتغیره گسترش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^۲$ و $f:D\to\mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبهٔ $n+۱$ داشته باشد. برای دو نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ و (x,y) در D با این خاصیت که پاره‌خط واصل بین دو نقطه در D قرار بگیرد، نقطهٔ (x^*,y^*) بر این پاره‌خط وجود دارد که

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_۰,y_۰)+\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)\big)\\
&+\frac{۱}{۲!}\big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)(y-y_۰)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_۰,y_۰)(y-y_۰)^۲\big)\\
&\qquad\vdots\\
&+\frac{۱}{n!}\big(\sum_{k=۱}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_۰,y_۰)(x-x_۰)^{n-k}(y-y_۰)^k\big)\\
&+\frac{۱}{(n+۱)!}\big(\sum_{k=۱}^{n+۱}\frac{(n+۱)!}{k!(n+۱-k)!}\frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}(x^*,y^*)(x-x_۰)^{n+۱-k}(y-y_۰)^k\big)
\end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم L خط گذرکننده از دو نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ و (x,y) باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x(t)=x_۰+t(x-x_۰)\\ y(t)=y_۰+t(y-y_۰)\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

با توجه به فرض، $\{(x(t),y(t))\mid t\in[۰,۱]\}\subset D$. قرار می‌دهیم $\phi(t):=f\big(x(t),y(t)\big)$. در این صورت ϕ تابعی

تعریف شده بر $[۰, ۱]$ بوده، بنابر قاعده زنجیری، برای هر t در این بازه

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)(x - x_۰) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)(y - y_۰) \\
\phi''(t) &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\big(x(t), y(t)\big)(x - x_۰)^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}\big(x(t), y(t)\big)(x - x_۰)(y - y_۰) + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\big(x(t), y(t)\big)(y - y_۰)^۲ \\
&\vdots \\
\phi^{(n)}(t) &= \sum_{k=۰}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\big(x(t), y(t)\big)(x - x_۰)^{n-k}(y - y_۰)^k \\
\phi^{(n+۱)}(t) &= \sum_{k=۰}^{n+۱} \frac{(n+۱)!}{(n+۱-k)!k!} \frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}\big(x(t), y(t)\big)(x - x_۰)^{n+۱-k}(y - y_۰)^k
\end{aligned}$$

بنابر این ϕ بر بازهٔ $[۰, ۱]$ مشتق مرتبهٔ $(n + ۱)$ـام پیوسته دارد. بنابر بسط تیلور برای توابع یک متغیره، $c \in (۰, ۱)$ وجود دارد که

$$\phi(۱) = \phi(۰) + \phi'(۰)(۱ - ۰) + \frac{\phi''(۰)}{۲!}(۱ - ۰)^۲ + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(۰)}{n!}(۱ - ۰)^n + \frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(۱ - ۰)^{(n+۱)}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطهٔ فوق و معرفی $(x^*, y^*) := (x(c), y(c))$ نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ فوق، برای (x, y) نزدیک $(x_۰, y_۰)$،

$$\begin{aligned}
f(x, y) \approx f(x_۰, y_۰) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_۰, y_۰)(y - y_۰)\Big) \\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_۰, y_۰)(x - x_۰)^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x_۰, y_۰)(x - x_۰)(y - y_۰) + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_۰, y_۰)(y - y_۰)^۲\Big) \\
&+ \cdots \quad + \frac{۱}{n!}\Big(\sum_{k=۱}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_۰, y_۰)(x - x_۰)^{n-k}(y - y_۰)^k\Big)
\end{aligned}$$

مثال. تابع f با ضابطهٔ $f(x, y) = \dfrac{۱}{\sqrt{x - y}}$ مفروض است. دامنهٔ تعریف این تابع برابر مجموعهٔ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x > y\}$ است. به سادگی مشاهده می‌شود، f بر دامنهٔ تعریف خود دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه است. به این ترتیب، به طور مثال اگر بخواهیم مقدار f را در یک همسایگی از نقطهٔ $(۲, ۱)$ با یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ تقریب بزنیم آنکاه

$$\begin{aligned}
f(x, y) \approx f(۲, ۱) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(۲, ۱)(x - ۲) + \frac{\partial f}{\partial y}(۲, ۱)(y - ۱)\Big) \\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲, ۱)(x - ۲)^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۲, ۱)(x - ۲)(y - ۱) + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲, ۱)(y - ۱)^۲\Big)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{۱}{۲}(x - y)^{-\frac{۳}{۲}} \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{۱}{۲}(x - y)^{-\frac{۳}{۲}} \\
&\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x, y) = \frac{۳}{۴}(x - y)^{-\frac{۵}{۲}} \ , \ \ \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{۳}{۴}(x - y)^{-\frac{۵}{۲}} \ , \ \ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x, y) = \frac{۳}{۴}(x - y)^{-\frac{۵}{۲}}
\end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱) = -\frac{۱}{۲}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱) = \frac{۱}{۲}\,,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲,۱) = \frac{۳}{۴}\,,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۲,۱) = -\frac{۳}{۴}\,,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲,۱) = \frac{۳}{۴}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\sqrt{x-y}} \approx ۱ + \big(-\frac{۱}{۲}(x-۲) + \frac{۱}{۲}(y-۱)\big) + \frac{۱}{۲}\big(\frac{۳}{۴}(x-۲)^۲ - \frac{۳}{۲}(x-۲)(y-۱) + \frac{۳}{۴}(y-۱)^۲\big)$$

۲۱ جلسه‌ی بیست و یکم، شنبه

یادآوری ۱۷۲. بردار نرمال (عمود بر) رویه‌ی به معادله‌ی $f(x,y,z)=0$ در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است

$$\mathrm{n}=\big(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0)\big)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است:

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\big(x-x_0\big)+f_y(x_0,y_0,z_0)\big(y-y_0\big)+f_z(x_0,y_0,z_0)\big(z-z_0\big)=0$$

به طور خاص بردار نرمال رویه‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی (x_0,y_0) به صورت زیر است

$$\big(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1\big)$$

دقت کنید که مؤلفه‌ی آخر مثبت است و این بدان جهت است که بردار گرادیان در جهت افزایش تابع است. نیز معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$f_x(x_0,y_0)\big(x-x_0\big)+f_y(x_0,y_0)\big(y-y_0\big)=z-z_0$$

گفتیم که اگر $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی اول آن (تقریب خطی آن) حول نقطه‌ی $(x,y)=(a,b)$ به صورت زیر است:

$$f(x,y)\approx P_1(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)$$

معادله‌ی بالا در واقع از فرمول دیفرانسیل کلی به دست آمده است:

$$\Delta z\approx dz=f_xdx+f_ydy$$

چندجمله‌ی تیلور درجه‌ی اول را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$P_1(x,y)=f(a,b)+\Big(f_x(a,b),f_y(a,b)\Big)\begin{bmatrix}x-a\\y-b\end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم:

$$f'(a,b)=\Big(f_x(a,b),f_y(a,b)\Big)$$

شباهت معادله‌ی بالا به حالت تک‌متغیره‌ی زیر آشکار می‌شود:

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

چند جمله‌ای تیلور در توابع تک متغیره

درجه‌ی اول

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big)$$

درجه‌ی دوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big) + \frac{f''(a)}{۲!}\big(x-a\big)^{۲}$$

درجه‌ی سوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\big(x-a\big) + \frac{f''(a)}{۲!}\big(x-a\big)^{۲} + \frac{f'''(a)}{۳!}\big(x-a\big)^{۳}$$

بسط تیلور

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

چند جمله‌ای تیلور در توابع دو متغیره

درجه‌ی دوم

$$z = f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big) +$$
$$\frac{۱}{۲} f_{xx}(a,b)\big(x-a\big)^{۲} + f_{xy}(a,b)\big(x-a\big)\big(y-b\big) + \frac{۱}{۲} f_{yy}(a,b)\big(y-b\big)^{۲}$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$f(x,y) \approx \underbrace{P_{۲}(x,y)}_{\text{تیلور درجه‌ی دوم}} = f(a,b) + \begin{bmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} +$$

$$\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

احتمالاً تا اینجا توجه کرده‌اید که مشتقات توابع چندمتغیره، در واقع **توابعی ماتریسی** هستند.[۱۲]

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تک متغیره	$\mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$ دو متغیره
$f(x_۰)$	$f(x_۰, y_۰)$
$f'(x_۰)$	$\begin{bmatrix} f_x(x_۰,y_۰) & f_y(x_۰,y_۰) \end{bmatrix}$
$f''(x_۰)$	$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_۰,y_۰) & f_{xy}(x_۰,y_۰) \\ f_{yx}(x_۰,y_۰) & f_{yy}(x_۰,y_۰) \end{bmatrix}$

[۱۲] این مطلب را در ریاضیات سطوح بالاتر خواهید آموخت. دانشجویان رشته‌ی ریاضی در درس هندسه‌ی دیفرانسیل یا آنالیز ۳ با این مطالب آشنا خواهند شد.

تمرین ۵۶. چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی دوم را برای تابع $f(x,y)=e^{-(x^۲+y^۲)}$ حول نقطه‌ی $(۰,۰)$ بنویسید.

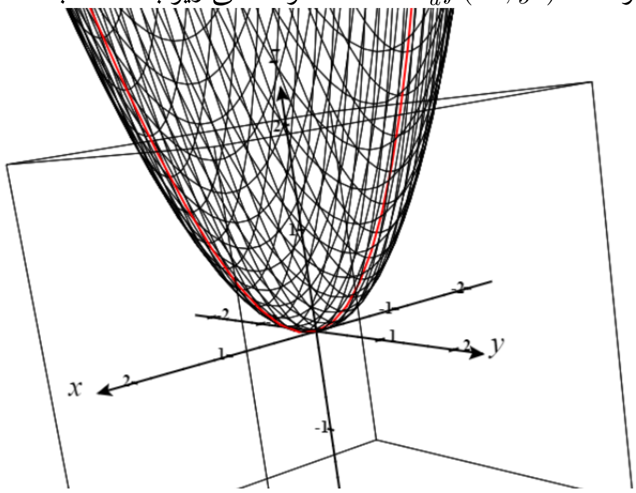
آخرین نکته‌ای که یادآوری می‌کنم این است که مشتق تابع $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ در جهت بردار یکه‌ی $u=(a,b)$ به صورت زیر است:

$$D_uf(x_۰,y_۰)=f_x(x_۰,y_۰)a+f_y(x_۰,y_۰)b$$

مشتق سوئی در واقع شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی مورد نظر با صفحه‌ای است که روی بردارِ (a,b) به موازات محور z رسم شده است. تقعّرِ این منحنی را می‌توان با استفاده از مشتق سوئی دوم بررسی کرد:

$$D_u^۲f(x_۰,y_۰)=f_{xx}(x_۰,y_۰)a^۲+f_{yy}(x_۰,y_۰)b^۲+۲f_{xy}(x_۰,y_۰)ab$$

اگر $D_u^۲f(x_۰,y_۰)>۰$ آنگاه تقعر منحنی زیر به سمت بالاست:



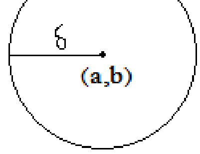
۱.۲۱ یافتن اکسترمم‌های توابع دو متغیره

یادآوری ۱۷۳ (توابع تک متغیره). فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که در سرتاسر $\mathbf{R}$ تعریف شده است. اگر این تابع در یک نقطه‌ی $x=a$ اکسترمم نسبی داشته باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'(a)=۰$. (محک مشتق اول). به نقطه‌ای که در آن مشتق موجود نباشد یا صفر باشد، یک نقطه‌ی بحرانی می‌گفتیم و آموختیم که اکسترممها در نقاط بحرانی رخ می‌دهند. در **محک مشتق دوم** نیز آموختیم که در نقطه‌ی بحرانی $x=a$ اگر $f''(a)>۰$ آنگاه تقعر به سمت بالاست (مینیمم نسبی) و اگر $f''(a)<۰$ آنگاه تقعر به سمت پایین (ماکزیمم نسبی) است.

در ادامه‌ی این درس، متناظرِ مطالب بالا را برای توابع دومتغیره بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱۷۴. منظور از یک همسایگی باز به شعاع δ از نقطه‌ی (a,b) مجموعه‌ی زیر است

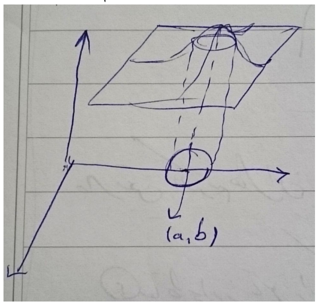
$$B_\delta(a,b)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲|\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}<\delta\}$$



تعریف ۱۷۵. تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(a, b) \in \mathbf{R}^۲$ دارای **ماکزیمم نسبی** است هرگاه $\delta > ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\forall (x, y) \in B_\delta(a, b) \quad f(x, y) \leqslant f(a, b)$$

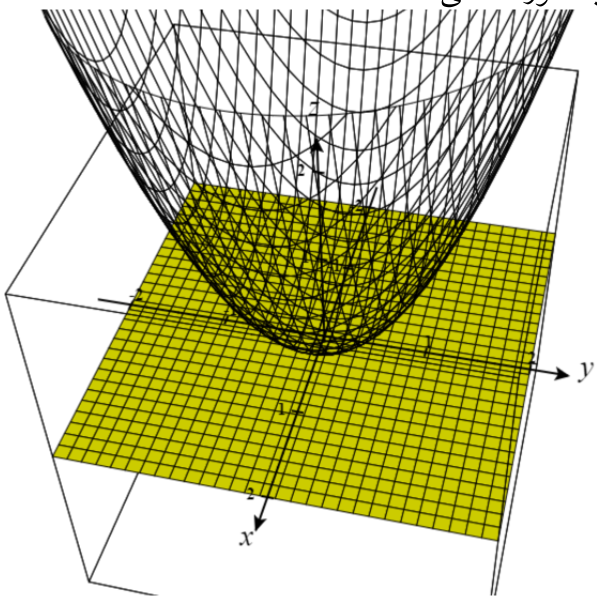
به طور مشابه مینیمم نسبی تعریف می‌شود.



تابع f در نقطه‌ی (a, b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x, y) \in Dom(f) \quad f(x, y) \leqslant f(a, b)$$

مشاهدات ۱۷۶. وقتی می‌گوئیم صفحه‌ی A به رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (a, b) مماس است، یعنی در یک همسایگیِ $B_\delta(a, b)$ صفحه‌ی A رویه را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. وقتی نقطه‌ای اکسترمم نسبی باشد، صفحه‌ی مماس در آن نقطه به صورت افقی است:



قضیه ۱۷۷. اگر تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه اگر $f_x(x_۰, y_۰)$ و $f_y(x_۰, y_۰)$ موجود باشند داریم:

$$f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$

به بیان دیگر

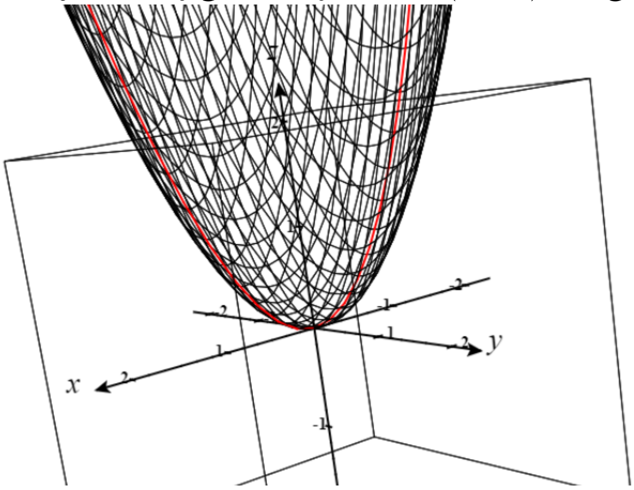
$$\nabla f(x_۰, y_۰) = (۰, ۰)$$

که تأییدکننده‌ی مشاهده‌ی بالاست که صفحه‌ی مماس در این نقاط افقی است.

اثبات. منحنی $z = f(x, y_0)$ روی رویه‌ی $z = f(x, y)$ واقع است. از آنجا که رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) اکسترمم دارد، این منحنی در نقطه‌ی $x = x_0$ دارای اکسترمم نسبی است. بنابراین

$$f'(x, y_0)|_{x=x_0} = 0$$

یعنی $f_x(x_0, y_0) = 0$؛ و به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $f_y(x_0, y_0) = 0$.

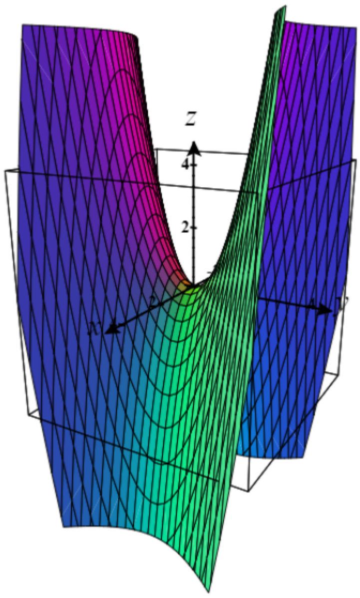


□

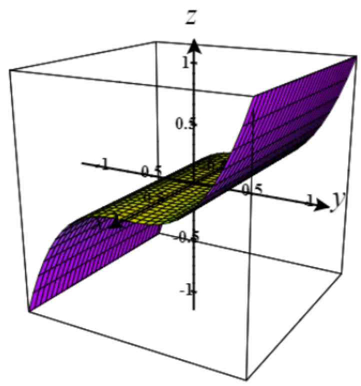
تعریف ۱۷۸. نقطه‌ی $(a, b) \in Dom(f)$ را یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع f می‌خوانیم هرگاه در آن $f_x = f_y = 0$ یا یکی از f_x یا f_y موجود نباشند.

توجه ۱۷۹. اکسترممها همواره در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتند، اما هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نیست.

مشاهدات ۱۸۰. در توابع دو متغیره، علاوه بر اکسترمم می‌توانیم وضعیت زینی داشته باشیم:



توجه کنید که نقطه‌ی بالا در یک جهت ماکزیمم است و در جهت دیگر مینی‌موم. **به طور کلی نقطه‌ی زینی، یک نقطه‌ی بحرانی است که در آن $f_x = f_y = 0$ و این نقطه نه مینی‌موم است و نه ماکزیمم.** پس در این نقطه، نمی‌توان صفحه‌ای بر رویه مماس کرد که رویه را در تنها در یک نقطه قطع کند. به نمودارِ $z = y^3$ در زیر دقت کنید. نقطه‌ی $(0, 0)$ نیز یک نقطه‌ی زینی است:



نتیجه ۱۸۱. اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی باشد، دو حالت داریم:
حالت اول: $f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$. در این حالت نقطه‌ی مورد نظر یا ماکزیمم نسبی است یا مینی‌موم نسبی است یا زینی. (به نقطه‌ای که در آن $f_x = f_y = ۰$ یک نقطه‌ی ایستائی گفته می‌شود).
حالت دوم. یکی از f_x یا f_y موجود نیستند. در این حالت یا مینی‌موم نسبی داریم یا ماکزیمم نسبی یا هیچکدام.

مثال ۱۸۲. اکسترمم‌های تابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

$$f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۱۴$$

پاسخ. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

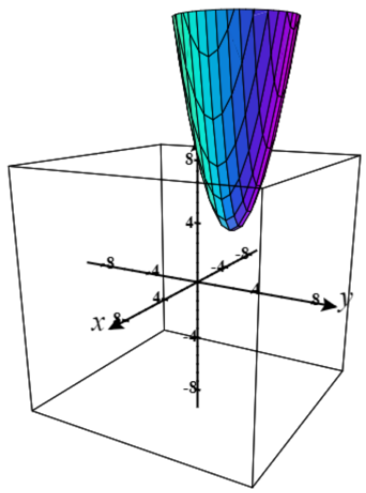
$$f_x = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$f_y = ۲y - ۶ = ۰ \Rightarrow y = ۳$$

پس نقطه‌ی $(۱, ۳)$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع بالا است. می‌توان نوشت:

$$f(x,y) = (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ + ۴$$

پس نقطه‌ی $(۱, ۳)$ نقطه‌ی مینی‌موم نسبی و مطلق تابع مورد نظر است:



□

مثال ۱۸۳. نخست دامنه، و سپس نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = x \ln y$ را بیابید.

۲۲ جلسه‌ی بیست و دوم، دوشنبه

تمرین ۵۷. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر معادله‌ی $f(z-۳x, z-۲y)=۱$ ، z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y مشخص کند، نشان دهید که

$$۲\frac{\partial z}{\partial x}+۳\frac{\partial z}{\partial y}=۶$$

یادآوری ۱۸۴. اگر معادله‌ی ضمنیِ $g(x,y,z)=۰$، متغیرِ z را بر حسب متغیرهای x و y به دست بدهد، آنگاه بنا به قضیه‌ی مشتق تابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

پاسخ. راه حل اول_

$$g(x,y,z)=f(\underbrace{z-۳x}_{u},\underbrace{z-۲y}_{v})-۱=۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{-(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}}=\frac{-(\frac{\partial f}{\partial u}(-۳)+\frac{\partial f}{\partial v}(۰))}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{-(\frac{\partial f}{\partial v}(-۲))}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$۲\frac{\partial z}{\partial x}+۳\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۶(\frac{\partial f}{\partial u})}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}}+\frac{۶(\frac{\partial f}{\partial v})}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}}=۶$$

راه حل دوم_

$$f(z-۳x, z-۲y)=۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۰\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=۰\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x}-۳)+\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial x})=۰$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۳\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}}$$

به همین ترتیب داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۰$$

و مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ را نیز به طریق بالا می‌توانیم محاسبه می‌کنیم (ادامه راه حل به عهده‌ی شما). □

۱.۲۲ نقاط بحرانی

یادآوری ۱۸۵ (توابع تک متغیره). فرض کنید که

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

یک تابع تک متغیره‌ی پیوسته باشد که

$$x\mapsto f(x).$$

گفتیم که نقاط بحرانی یک چنین تابعی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. نقاطی مانند $x_\circ$ به طوری که $f'(x_\circ) = \circ$. این نقاط نیز یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، و یا

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ در $y = x^3$) هستند.

۲. نقاطی مانند $x_\circ$ به طوری که $f'(x_\circ)$ موجود نیست. این نقاط یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، هستند و یا

(ج) هیچکدام نیستند.

در زیر مفهوم نقاط بحرانی را برای توابع دو متغیره توضیح داده‌ایم.

۱.۱.۲۲ نقاط بحرانیِ توابع دو متغیره

نقاط بحرانی:

۱. نوع اول نقاطی هستند که در آنها به طور همزمان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) = \circ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) = \circ \end{cases}$$

این نوع نقاط را نقاط ابستائی می‌خوانند. این نقاط یکی از حالات زیر را دارند:

(آ) مینی‌موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ در $z = y^3$ و $z = x^2 - y^2$)

۲. نوع دوم نقاطی هستند که در آنها یکی از $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا هر دو موجود نباشند. این نقاط یکی از وضعبتهای زیر را دارند:

(آ) مینی‌موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) هیچکدام

مثال ۱۸۶. نقاط بحرانی تابع $z = y^2 - x^2$ و نوع آنها را مشخص کنید.

پاسخ.

$$z = f(x,y) = y^{۲} - x^{۲} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} = -۲x, \frac{\partial f}{\partial y} = ۲y$$

در نقطه‌ی $(۰,۰)$ داریم:

$$\nabla f(۰,۰) = (۰,۰)$$

در مسیر $(۰, y^{۲})$ روی رویه نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک مینی‌موم نسبی است.

$$(۰, y) \mapsto (۰, y^{۲})$$

در مسیر $(-x^{۲}, ۰)$ نقطه‌ی $(۰,۰)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$(x, ۰) \mapsto (-x^{۲}, ۰)$$

پس $(۰,۰)$ مینی‌موم و ماکزیمم نسبی است. یعنی نقطه‌ی $(۰,۰)$ زینی است. $\square$

۲.۲۲ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترمم‌ها و نقاط زینی

فرض کنید مشتقات دوم تابع $f(x,y)$ روی یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند و

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = ۰$$

بنویسید:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^{۲}(a,b)$$

آنگاه وضعیت زیر را داریم:

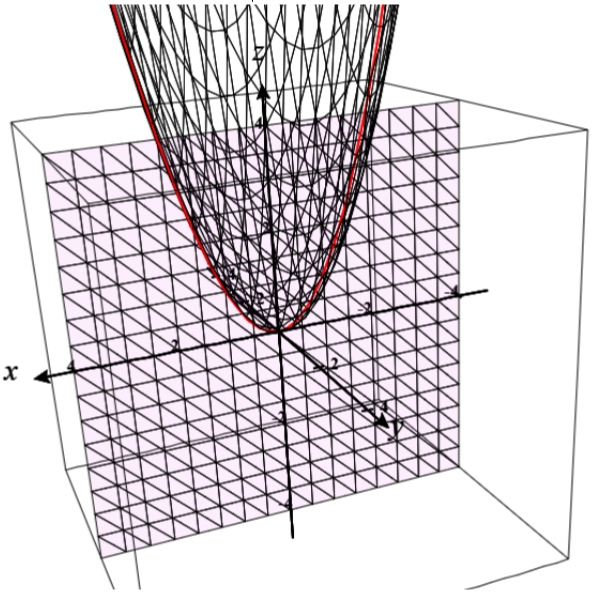
$$\begin{cases} D > ۰ \begin{cases} f_{xx}(a,b) > ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک مینی‌موم نسبی است.} \\ f_{xx}(a,b) < ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک ماکزیمم نسبی است.} \end{cases} \\ D < ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ یک نقطه‌ی زینی است.} \\ D = ۰ \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a,b) \text{ ممکن است مینی‌موم نسبی، ماکزیمم نسبی یا زینی باشد.} \end{cases}$$

ایده‌ی اثبات. اگر $u = (h,k)$ یک بردار یکه‌ی دلخواه باشد آنگاه مشتق دوم در جهت این بردار، نشان دهنده‌ی تقعر منحنی‌ای است که همزمان روی رویه و صفحه‌ی گذرنده از این بردار قرار دارد. اگر تقعر تمام این نوع منحنی‌های رو به بالا باشد، نقطه‌ی (a,b) یک مینی‌موم نسبی است.

$$D^{۲}_{u=(h,k)} f(a,b) > ۰$$

$$\begin{aligned} D^{۲}_{(h,k)}(a,b) &= f_{xx}h^{۲} + ۲f_{xy}hk + f_{yy}k^{۲} \\ &= f_{xx}(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k)^{۲} + \frac{k^{۲}}{f_{xx}} \underbrace{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{۲})}_{D} \end{aligned}$$

در عبارت بالا f_{xx} و قسمتی که D نام گذاری شده است تعیین کننده‌ی نوع نقاط بحرانی هستند.



□

مثال ۱۸۷. اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع $f(x,y) = y^۲ - x^۲$ را مشخص کنید.

پاسخ. تعیین نقاط بحرانی:

$$f_x = -۲x \Rightarrow (x = ۰ \Rightarrow f_x = ۰)$$

$$f_y = ۲y \Rightarrow (y = ۰ \Rightarrow f_y = ۰)$$

پس نقطه‌ی $(۰, ۰)$ یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$f_{xx}(x,y) = -۲ \Rightarrow f_{xx}(۰,۰) = -۲$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = ۰$$

$$f_{yy}(x,y) = ۲ \Rightarrow f_{yy}(۰,۰) = ۲$$

$$D(۰,۰) = \begin{vmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۴ < ۰$$

پس نقطه‌ی $(۰, ۰)$ یک نقطه‌ی زینی است. □

مثال ۱۸۸. اکسترمم‌ها و نقاط زینی تابع $z = y^۳$ را تعیین کنید.

مثال ۱۸۹. اکسترمم‌های موضعی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید و طرحی تقریبی از آن رسم کنید.

$$f(x,y) = x^۴ + y^۴ - ۴xy + ۱$$

پاسخ.

$$f_x(x,y) = ۴x^۳ - ۴y \Rightarrow f_x(x,y) = ۰ \Rightarrow y = x^۳$$

$$f_y(x,y) = ۴y^۳ - ۴x \Rightarrow f_y(x,y) = ۰ \Rightarrow x = y^۳$$

با استفاده از دو معادله‌ی بالا داریم

$$x = (x^۳)^۳ \Rightarrow x^۹ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۸ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۱, x = -۱$$

نقاط بحرانی تابع برابرند با

$$(۰, ۰), (۱, ۱), (-۱, -۱)$$

$$f_{xx}(x, y) = ۱۲x^۲ \Rightarrow f_{xx}(۰, ۰) = ۰, f_{xx}(۱, ۱) = ۱۲, f_{xx}(-۱, -۱) = ۱۲$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -۴$$

$$f_{yy}(x, y) = ۱۲y^۲ \Rightarrow f_{yy}(۰, ۰) = ۰, f_{yy}(۱, ۱) = ۱۲, f_{yy}(-۱, -۱) = ۱۲$$

نقطه‌ی $(۰, ۰)$:

$$D(۰, ۰) = \begin{vmatrix} ۰ & -۴ \\ -۴ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۶ < ۰$$

پس نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نقطه‌ی زینی است.

نقطه‌ی $(۱, ۱)$:

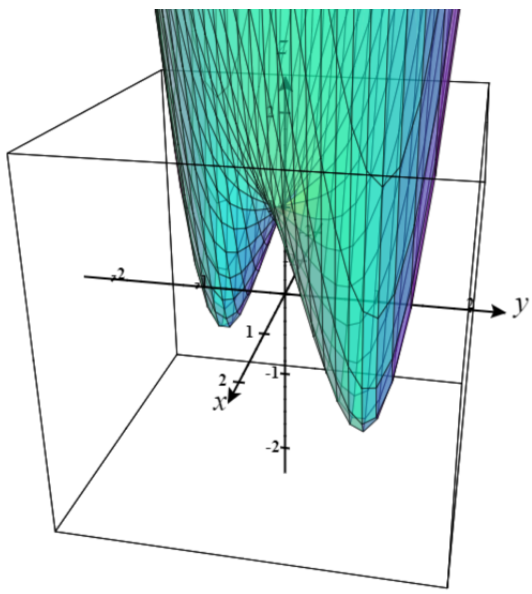
$$D(۱, ۱) = \begin{vmatrix} ۱۲ & -۴ \\ -۴ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۱۴۴ - ۱۶ > ۰, f_{xx}(۱, ۱) > ۰$$

پس نقطه‌ی $(۱, ۱)$ مینی‌موم نسبی است.

نقطه‌ی $(-۱, -۱)$:

$$D(-۱, -۱) = \begin{vmatrix} ۱۲ & -۴ \\ -۴ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۱۴۴ - ۱۶ > ۰, f_{xx}(-۱, -۱) > ۰$$

پس نقطه‌ی $(-۱, -۱)$ مینی‌موم نسبی است.



□

توجه کنید که تابع بالا یک تابع پیوسته است که دو مینی‌موم موضعی دارد بی آنکه هیچ ماکزیمم موضعی داشته باشد. آیا چنین چیزی در توابع تک‌متغیره ممکن است؟

۲۳ نیم‌جلسه‌ی بیست و سوم، چهارشنبه

تمرین ۵۸. تابع $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

(آ). در چه جهت‌هایی مانند $\overrightarrow{u} = (a,b)$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ تابع دارای مشتق سوئی است؟

پاسخ. فرض کنید $u = (a,b)$ یک بردار یکه باشد.

$$\overrightarrow{u} = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۱$$

داریم:

$$D_u f(x,y)|_{(x_۰,y_۰)} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰ + ah, y_۰ + bh) - f(x_۰,y_۰)}{h} \Rightarrow$$

$$D_u f(x,y)|_{(۰,۰)} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(ah,bh)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{(ah)(bh)}{h\sqrt{a^۲h^۲ + b^۲h^۲}} = \lim_{h\to ۰} \frac{abh}{|h| \underbrace{\sqrt{a^۲ + b^۲}}_{=۱}} = \lim_{h\to ۰} \frac{abh}{|h|}$$

اگر $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$ آنگاه حد بالا از یک طرف $ab+$ و از یک طرف $ab-$ است. پس تابع در سوی (a,b) مشتق‌پذیر نیست. برای این که حد بالا موجود باشد، باید یا $a \neq ۰$ یا $b \neq ۰$. یعنی تابع تنها در جهت بردارهای $i, -i, j$ و $-j$ مشتق سوئی دارد. □

(ب). آیا تابع در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر است؟

پاسخ.

یادآوری ۱۹۰. اگر تابع f در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه f در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ در هر جهتی مشتق‌پذیر است و مشتق سوئی f در جهت (a,b) با فرمول $(*)$ محاسبه می‌شود.

$$(*) \quad D_{u=(a,b)} f(x,y)|_{(x_۰,y_۰)} = f_x(x_۰,y_۰)a + f_y(x_۰,y_۰)b = \nabla f(x_۰,y_۰) \cdot (a,b)$$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی $(*)$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ برای تابع f برقرار نیست. پس این تابع مشتق‌پذیر نیست.

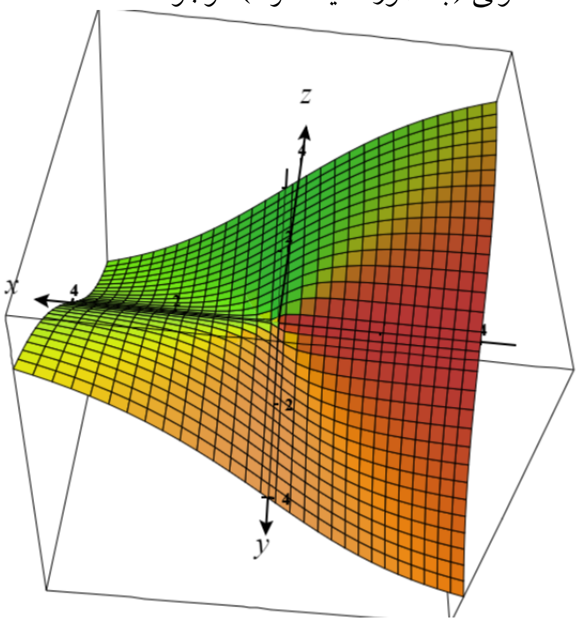
$$f_x(۰,۰) = ۰ \quad , \quad f_y(۰,۰) = ۰$$

اگر تابع در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_{u=(a,b)} f(x,y)|_{(۰,۰)} = ۰a + ۰b$$

می‌بینیم که اگر $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$ این فرمول برقرار نیست، پس این تابع نیز مشتق‌پذیر نیست.

در زیر تصویر تابع بالا کشیده است. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(۰,۰)$ قابل رسم نیست، هر چند مشتقات سوئی (به صورت یک‌طرفه) موجودند.



$\square$

تمرین ۵۹. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی از y, x توسط رابطه‌ی ضمنی زیر داده شده باشد،

$$f(x+z, y+z) = ۱$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -۱$$

پاسخ.

$$g(x,y,z) = f(\underbrace{x+z}_{u(x,y)}, \underbrace{y+z}_{v(x,y)}) - ۱ = ۰$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\left(۱ + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(۰ + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial y}$ نیز بر عهده‌ی شما باشد. $\square$

تمرین ۶۰. تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ \sin y}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

(آ). نشان دهید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall (x,y) \in Dom \quad \left(۰ < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \to |f(x,y) - ۰| < \epsilon\right)$$

محاسبات:

$$|\frac{x^۲ \sin y}{x^۲ + y^۲}| \leqslant \frac{x^۲ |\sin y|}{x^۲ + y^۲}$$

می‌دانیم که $\frac{x^۲}{x^۲+y^۲} \leqslant ۱$. پس داریم:

$$\frac{x^۲ |\sin y|}{x^۲ + y^۲} \leqslant |\sin y|$$

همچنین می‌دانیم $|\sin y| \leqslant |y|$. پس داریم

$$|\sin y| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

(اتمام محاسبات و ادامه‌ی پاسخ:)

اگر $\delta < \epsilon$ آنگاه اگر $۰ < \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ آنگاه $|f(x, y)| < \epsilon$. □

(ب). $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ را در تمام نقاط محاسبه کنید.

پاسخ. در نقاط $(x, y) \neq (۰, ۰)$، $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin y(۲x)(x^۲ + y^۲) - (۲x)x^۲ \sin y}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ نیز به صورت زیر است

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(۰ + h, ۰) - f(۰, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

پس داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y(۲x)(x^۲+y^۲) - (۲x)x^۲ \sin y}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x, y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ \quad (x, y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

□

(ج). $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x, y)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

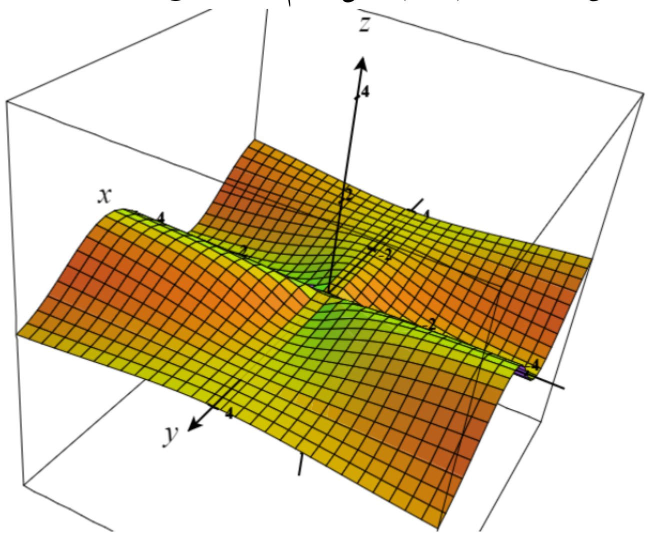
$$\lim_{h \to ۰} \frac{f_x(۰ + h, ۰) - f_x(۰, ۰)}{h} = \ldots$$

□

(د). در چه جهت‌هایی تابع بالا مشتق‌پذیر است؟

(ه). آیا تابع در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ مشتق‌پذیر است؟ (راهنمایی: رابطه‌ی $D_u f = \nabla f \cdot u$ برقرار نیست. پس مشتق‌پذیر نیست.)

پاسخ قسمتهای د و ه مشابه سوال اول این جلسه است. در زیر نمودار این تابع را رسم کرده‌ایم. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ قابل رسم نیست ولی همه‌ی مشتقات سوئی در این نقطه موجودند.



۲۴ جلسه‌ی بیست و چهارم، دوشنبه

تمرین ۶۱. نقاط بحرانی توابع زیر و نوع آنها را مشخص کنید.

۱. $f(x,y) = (x-1)\ln(xy) \quad xy > 0$

پاسخ.

$$f_y(x,y) = \frac{(x-1)x}{xy} = 0$$

تابع بالا در $x=0$ برابر صفر است ولی نظر به دامنه‌ی تابع $x=0$ غیر قابل قبول است. اگر $x \neq 0$ داریم

$$f_y(x,y) = \frac{x-1}{y} = 0$$

پس $x=1$. حال

$$f_x(x,y) = \ln(xy) + \frac{y}{xy}(x-1) = 0 \Rightarrow \ln(xy) + \frac{x-1}{x} = 0$$
$$f_x(1,y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

نقطه‌ی $(1,1)$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع مورد نظر است.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (1,1)$$

اگر $D>0$ و $f_{xx}>0$ آنگاه نقطه‌ی $(1,1)$ مینی‌موم نسبی است و اگر $D>0$ و $f_{xx}<0$ آنگاه نقطه‌ی $(1,1)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y}{xy} + \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 1$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1-x}{y^2} \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$D<0$ پس نقطه‌ی $(1,1)$ یک نقطه‌ی زینی است. □

۲. $f(x,y) = y(e^x - 1)$

۳. $f(x,y) = xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$

۴. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$

مثال ۱۹۱. کوتاهترین فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۰,-۲)$ را به صفحه‌ی $x+۲y+z=۴$ بیابید.

پاسخ. فرض کنید (x,y,z) نقطه‌ای روی صفحه باشد. پس $z=۴-x-۲y$. فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۰,-۲)$ از نقطه‌ی (x,y,z) برابر است با

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲+(z-۲)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲+(۶-x-۲y)^۲}$$

$$F=d^۲(x,y)=(x-۱)^۲+y^۲+(۶-x-۲y)^۲$$

کافی است نقطه‌ای مانند $(x_۰,y_۰)$ پیدا کنیم که در آن تابع F مینی‌موم شود.

تعیین نقاط بحرانی F:

$$F_x(x,y)=۲(x-۱)+(-۲)(۶-x-۲y)=۴x+۴y-۱۴=۰\Rightarrow ۲x+۲y=۷$$

$$F_y(x,y)=۲y-۴(۶-x-۲y)=۴x+۱۰y-۲۴=۰\Rightarrow ۲x+۵y=۱۲$$

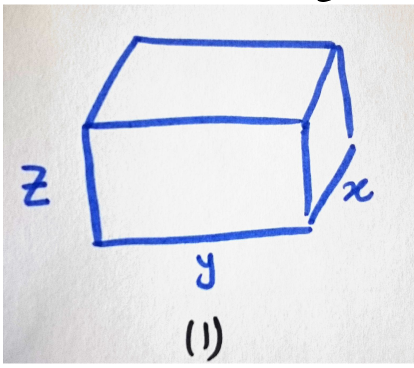
بعد از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به نقطه‌ی $(\frac{۱۱}{۶},\frac{۵}{۳})$ می‌رسیم. بنا به صورت سوال می‌دانیم که تابع F دارای مینی‌موم نسبی است. پس این مینی‌موم در نقطه‌ی $(\frac{۱۱}{۶},\frac{۵}{۳})$ رخ می‌دهد. (زیرا این نقطه، بحرانی است.) پس فاصله‌ی مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{F(\frac{۱۱}{۶},\frac{۵}{۳})}=\dots$$

□

مثال ۱۹۲. حداکثر حجم یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که بتوان با $۱۲m^۲$ مقوا ساخت.

راهنمایی.



$$۲xy+۲zx+xy=۱۲$$

$$V(x,y,z)=xyz$$

$$z=\frac{۱۲-xy}{۲y+۲x}$$

تابع $F(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x,y)=xy(\frac{۱۲-xy}{۲y+۲x})$$

کافی است y,x را به گونه‌ای بیابیم که تابع F ماکزیمم داشته باشد. (یه محک دوم نیازی نیست.) □

۱.۲۴ اکسترمم‌های مطلق

یادآوری ۱۹۳ (از توابع تک متغیره). فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته‌ی کراندار $[a,b]$ باشد. آنگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ دارای ماکزیمم و مینی‌موم مطلق است.

دستورالعمل محاسبه:

۱. نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی $[a,b]$ بیابید.

۲. مقدار تابع را در نقاط مرزیِ b,a تعیین می‌کنیم.

۳. مقدار تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه می‌کنیم.

اصطلاحات توپولوژیک در قضیه‌ی بالا:

۱. تابع پیوسته

۲. نقطه‌ی مرزی

۳. مجموعه‌ی بسته و کراندار

هدفمان در ادامه‌ی درس این است که متناظرِ آنچه در یادآوریِ ۱۹۳ بیان شده است، برای توابع دو متغیره ثابت کنیم. برای این منظور، باید مفاهیم بسته بودن، کراندار بودن و پیوسته بودن را برای این حالت نیز تعریف کنیم. مفهوم پیوسته بودن را در درسهای پیشین دیده‌ایم. در زیر به بقیه‌ی این مفاهیم توپولوژیک پرداخته‌ایم. یادگرفتن درست معنی توپولوژی، نیاز به گذراندن ۴ واحد درسی در رشته‌ی ریاضی دارد و جزو اهداف اصلی درس ریاضی ۲ نیست. شما تنها باید بدانید که هرگاه سخن از پیوستگی، فاصله، مجموعه‌ی باز و مجموعه‌ی بسته، و غیره به میان می‌آید، پای توپولوژی در کار است.

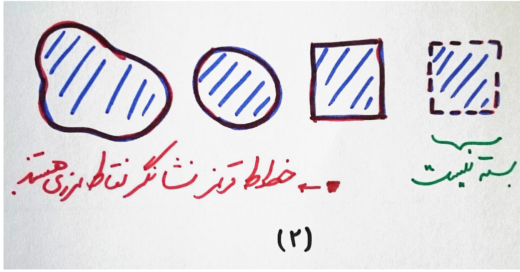
۲.۲۴ توپولوژی در $\mathbf{R}^۲$

۱. **دیسک باز** به مرکز (a,b) و شعاع δ:

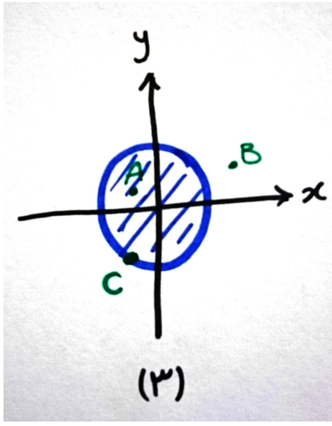
$$B_\delta\big((a,b)\big)=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}\underbrace{<}_{\text{اکید}}\delta\}$$

۲. **نقاط مرزی** یک مجموعه‌ی $X\subseteq\mathbf{R}^۲$. نقطه‌ی $(a,b)\in\mathbf{R}^۲$ را یک نقطه‌ی مرزی برای مجموعه‌ی $D\subseteq\mathbf{R}^۲$ می‌خوانیم هرگاه برای هر دیسکِ بازِ $B_\delta\big((a,b)\big)$ (به ازای مقادیر مختلفِ δ) داشته باشیم:

$$\begin{cases} B_\delta\big((a,b)\big)\cap D\neq\emptyset \to \text{این اشتراک نباید خودِ } (a,b) \text{ شود.} \\ B_\delta\big((a,b)\big)\cap \underbrace{D^c}_{D^c=\mathbf{R}-D}\neq\emptyset \to \text{این اشتراک نباید خودِ } (a,b) \text{ شود.}\end{cases}$$



مثال ۱۹۴. $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ (دقت کنید که دایره‌ی $x^2+y^2=1$ جزوِ D نیست.)



A نقطه‌ی مرزی نیست.

B نقطه‌ی مرزی نیست.

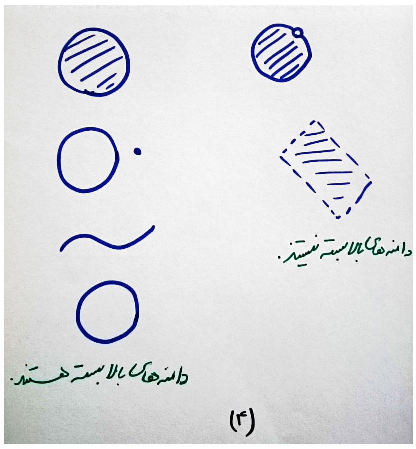
C نقطه‌ی مرزی است. پس مجموعه‌ی نقاط مرزی D مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$$

۳. **مجموعه‌ی بسته:**

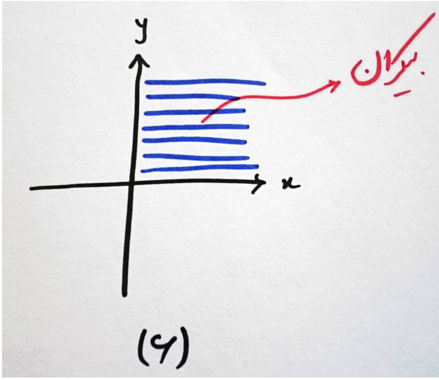
مجموعه‌ی $D\subseteq \mathbf{R}^2$ را بسته می‌خوانیم هرگاه شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.

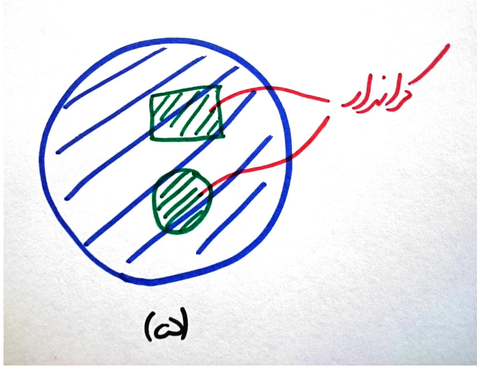
$$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$$



۴. **مجموعه‌ی کراندار**

مجموعه‌ی $\mathbf{R}^۲ \supseteq D$ را کراندار می‌خوانیم هرگاه نقطه‌ی $(a,b) \in \mathbf{R}^۲$ و شعاع δ موجود باشند به طوری که $D \subseteq B_\delta\big((a,b)\big)$





تعریف ۱۹۵. فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی (a,b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x,y) \in Dom(f) \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

توجه کنید که نیازی نیست که تابع در یک همسایگی (دیسک باز) از نقطه‌ای که در آن ماکزیمم یا مینی‌موم مطلق اتفاق می‌افتد، تعریف شده باشد. در واقع ممکن است که اکسترممهای مطلق روی مرز یک ناحیه رخ دهند. حال آماده‌ایم تا قضیه‌ای مشابه درس ریاضی ۱، برای اکسترممهای مطلق توابع دو متغیره بیان کنیم:

قضیه ۱۹۶. اگر $f(x,y)$ یک تابع پیوسته در یک مجموعه‌ی بسته و کراندار D باشد آنگاه f در D هم ماکزیمم و هم مینی‌موم مطلق دارد.

روش محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق

۱. نقاط بحرانی تابع را بیابید.

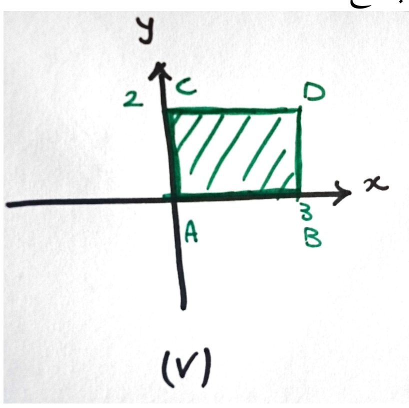
۲. مرز دامنه را مشخص کنید.

۳. مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه کنید.

مثال ۱۹۷. اکسترمم‌های مطلق تابع زیر را در دامنه‌ی مشخص شده بیابید.

$$f(x,y) = x^۲ - ۲xy + ۲y \quad D = \{(x,y) | ۰ \leqslant x \leqslant ۳, ۰ \leqslant y \leqslant ۲\}$$

پاسخ.

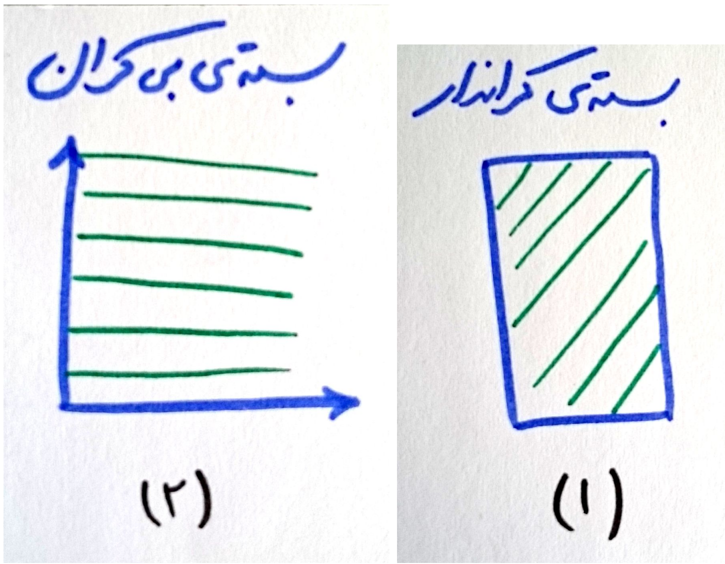


پاسخ سوال بالا را در جلسه‌ی بعدی خواهیم داد. □

۲۵ نیم جلسه‌ی بیست و پنجم، چهارشنبه

۱.۲۵ اکسترمم‌های مطلق

گفتیم که اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره‌ی پیوسته باشد که در یک مجموعه‌ی بسته‌ی کراندارِ D تعریف شده است آنگاه f در D دارای مینی‌موم و ماکزیمم مطلق است.



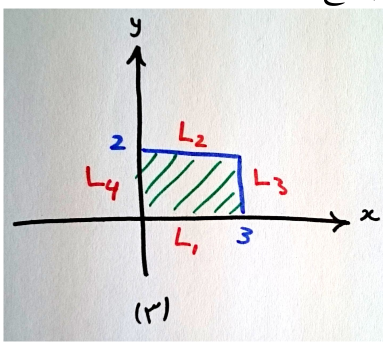
دستورالعمل:

مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی با هم مقایسه کنید.

مثال ۱۹۸. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^{۲} - ۲xy + ۲y$ را در مجموعه‌ی D پیدا کنید.

$$D = \{(x,y) | ۰ \leqslant x \leqslant ۳, ۰ \leqslant y \leqslant ۲\}$$

پاسخ. D یک ناحیه‌ی بسته و کراندار است. تابع f چند جمله‌ای و از این رو پیوسته است.



حال نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که نقاط بحرانی، روی مرزها نیستند، بلکه درون ناحیه‌ی داده شده هستند.

$$f_x(x,y) = ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow x = y$$

$$f_y(x,y) = -۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

تنها نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ی $(۱,۱)$ است. داریم:

$$f(۱,۱) = ۱ - ۲ + ۲ = ۱$$

مجموعه نقاط روی خطوط مرزهای دامنه را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.

$$L_۱ = \{(x, ۰) | ۰ \leqslant x \leqslant ۳\}, \quad L_۲ = \{(x, ۲) | ۰ \leqslant x \leqslant ۳\}$$

$$L_۳ = \{(۳, y) | ۰ \leqslant y \leqslant ۲\}, \quad L_۴ = \{(۰, y) | ۰ \leqslant y \leqslant ۲\}$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۱$:

$$f(x, ۰) = x^۲ \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲$$

این تابع در نقاط زیر اکسترمم دارد:

$$f(۰, ۰) = ۰, f(۳, ۰) = ۹$$

پس $(۰, ۰)$ مینی‌موم مطلق در $L_۱$ و $(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق در $L_۱$ است.
محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۲$:

$$f(x, ۲) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲ \quad x \in (۰, ۳)$$

$$f(۲, ۲) = ۴ \quad L_۲ \text{ ماکزیمم مطلق در مسیر }$$

$$f(۰, ۲) = ۴ \quad L_۲ \text{ مینی‌موم مطلق در مسیر }$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۳$:

$$f(۳, y) = ۹ - ۶y + ۲y = ۹ - ۴y \quad y \in [۰, ۲]$$

$$f(۳, ۲) = ۹ - ۸ = ۱, f(۳, ۰) = ۹$$

پس در مسیر $L_۳$ نقطه‌ی $f(۳, ۲)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $f(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق است.
محاسبه‌ی مقادیر تابع در $L_۴$:

$$f(۰, y) = ۲y \quad y \in [۰, ۲]$$

$$f(۰, ۰) = ۰, f(۰, ۲) = ۴$$

پس در مسیر $L_۴$ نقطه‌ی $(۰, ۰)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $(۰, ۲)$ ماکزیمم مطلق است. از مقایسه‌ی نقاط بدسته آمده نتیجه می‌گیریم که در نقاط $(۰, ۰)$ و $(۲, ۲)$ مینی‌موم رخ می‌دهد و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است؛ همچنین در نقطه‌ی $(۳, ۰)$ ماکزیمم مطلق رخ داده است و مقدار تابع در این نقطه ۹ است. $\square$

تمرین ۶۲. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x, y) = xy^۲$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

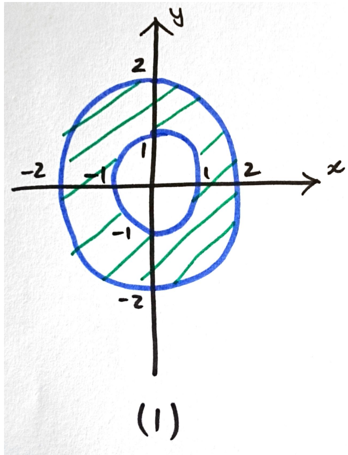
$$D = \{(x, y) | x \geqslant ۰, y \geqslant ۰, x^۲ + y^۲ \leqslant ۳\}$$

۲۶ جلسه‌ی بیست و ششم، شنبه

تمرین ۶۳. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

$$D = \{(x,y) | ۱ \leqslant x^۲ + y^۲ \leqslant ۴\}$$

پاسخ.

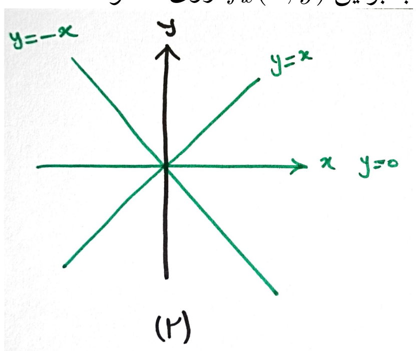


ناحیه‌ی D بسته و کراندار است و تابع f در ناحیه‌ی D پیوسته است. بنابراین f در D دارای اکسترمم‌های مطلق است. حال می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ برای $(x,y) \in D$ را بیابیم.

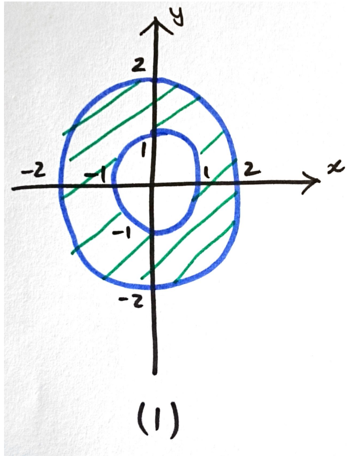
$$f_x(x,y) = \frac{y^۲(x^۲+y^۲) - ۲x(xy^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{x^۲y^۲ + y^۴ - ۲x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{y^۴ - x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow y^۲(y^۲ - x^۲) = ۰$$

بنابراین $f_x(x,y)$ روی خطوط $y = \pm x$ و $y = ۰$ برابر صفر است.

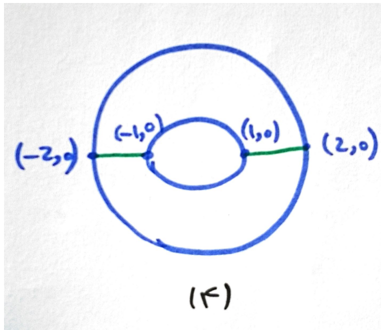


$$f_y(x,y) = \frac{۲xy(x^۲+y^۲) - ۲y(xy^۲)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲x^۳y + ۲xy^۳ - ۲xy^۳}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲x^۳y}{(x^۲+y^۲)^۲} = ۰$$



روی خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ مقدار f_y صفر است. پس نقاط بحرانی تابع که از اشتراک این خطوط به دست می‌آیند به صورت زیرند:

$$D \cap \{(x,y)|y = ۰\}$$



مقادیر تابع در نقاط بحرانی برابر صفر است. حال اکسترمم‌های تابع را روی مرزهای D بدست می‌آوریم.

$$L_۱ = \{(x,y)|x^۲ + y^۲ = ۱\}$$

مقادیر تابع $f(x,y)$ روی مرز $L_۱$ را توسط تابع تک متغیره‌ی g به صورت زیر پوشیده می‌شوند:

$$f(x,y) = \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} \overset{(x,y)\in L_۱}{\Rightarrow} g(x) = x(۱ - x^۲) = x - x^۳ \quad x \in [-۱, ۱]$$

برای تعیین اکسترمم‌های تابع $g(x)$ در ناحیه‌ی $[-۱, ۱]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم.

$$g'(x) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

مقادیر تابع در این نقاط به صورت زیر است.

$$g(x) = x - x^۳ \begin{cases} x = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳^۳}} \\ x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow -\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۳^۳}} \end{cases}$$

پس برای تابع $f(x,y)$ مقادیر زیر را داریم:

$$(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱ - \frac{۱}{۳}}) \Rightarrow f(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱ - \frac{۱}{۳}}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} - (\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۳$$

$$(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}}) \Rightarrow f(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}}) = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} + (\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{۳}$$

محاسبه‌ی g در نقاط مرزی:

$$g(۱) = ۰, g(-۱) = ۰$$

یعنی

$$f(۱, ۰) = f(-۱, ۰) = ۰.$$

حال به طور مشابه مقادیر تابع را روی مرز $L_۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$L_۲ = \{(x, y) | x^۲ + y^۲ = ۴\}$$
$$f(x, y) = \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} \quad (x, y) \in L_۲$$
$$h(x) = \frac{x(۴ - x^۲)}{۴} \quad x \in [-۲, ۲]$$

روند بالا را برای تابع h نیز تکرار کنید. مقادیر تابع f را در نقاط بدست آمده با هم مقایسه کنید. ادامه با شما! اکسترمم‌های بدست آمده به صورت زیر خواهند بود:

$$f(\frac{-۲}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۴ - (\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲}) = ۰/۷۷ \text{ ماکزیمم مطلق}$$
$$f(\frac{۲}{\sqrt{۳}}, \pm\sqrt{۴ - (\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲}) = -۰/۷۷ \text{ مینی‌موم مطلق}$$

□

۱.۲۶ روش ضرایب لاگرانژ

در مثال قبل لازم بود که اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x, y)$ را روی ناحیه‌ی $L_۱ = \{(x, y) | x^۲ + y^۲ = ۱\}$ محاسبه کنیم. برای این کار از توابع تک متغیره استفاده کردیم. در این بخش، می‌خواهیم روشی کلی برای محاسبه‌ی اکسترممهای مطلق یک تابع، تحت یک قید ارائه کنیم. نخست روش مورد نظر را به صورت یک دستورالعمل بیان می‌کنیم و سپس برای این دستورالعمل توجیه‌های هندسی و جبری خواهیم آورد:

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق $f(x, y)$ تحتِ قیدِ $g(x, y) = k$ از روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) دستگاه سه معادله با سه مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

۲) مقادیر اکسترمم مطلق تابع f دقیقاً در برخی از (x, y)های جواب معادله‌ی بالا رخ می‌دهد. مقادیر تابع را در این نقاط با هم مقایسه می‌کنیم.

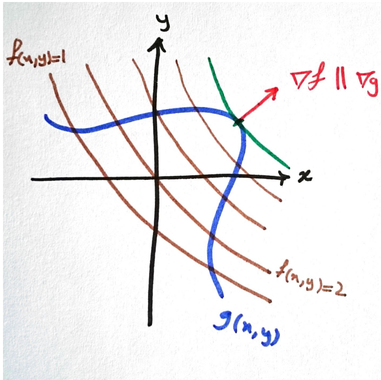
به بیان دیگر دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \to \text{گرادیان } f \text{ با گرادیان } g \text{ موازی شود.} \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

تعمیم ۱۹۹. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y,z)$ تحت قید $g(x,y,z) = k$ دستگاه چهار معادله با چهار مجهول زیر را حل کرده مقادیر تابع را در (x,y,z)های بدست آمده با هم مقایسه می‌کنیم. حداکثر این مقادیر، ماکزیمم مطلق و حداقل آنها مینی‌موم مطلق خواهد شد.

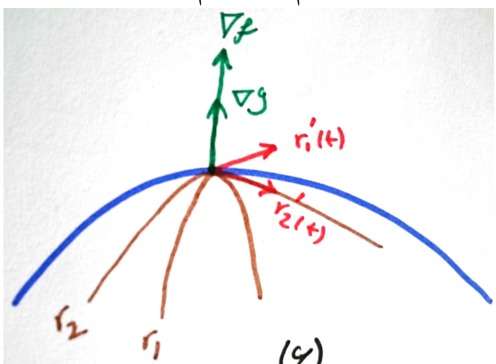
$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

در شکل زیر توجیهی هندسی برای روش ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره آورده‌ایم. دقت کنید که در تقاطع با نمودار تابعِ $g(x,y) = k$ تابع f زمانی حداکثر می‌شود که منحنی تراز آن بر g مماس شود؛ دقیقاً در جائی که f می‌خواهد از $g(x,y) = k$ خارج شود. در نقطه‌ای که ایندو بر هم مماسند، باید گرادیانها با هم موازی باشند.



(۵)

بیایید برای توابع سه متغیره، روش ضرایب لاگرانژ را به طور دقیقتر توجیه کنیم. تابع سه متغیره‌ی $f(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اکسترمم مطلق آن را روی رویه‌ی $g(x,y,z) = k$ محاسبه کنیم.



(۶)

فرض کنید $\overrightarrow{r}(t)$ یک منحنی فضایی باشد به طوری که $\overrightarrow{r}(t_\circ) = p$ و p یک نقطه‌ی ماکزیمم مطلق برای تابع f باشد. پس تابع تک متغیره‌ی زیر از $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در $t = t_\circ$ دارای ماکزیمم مطلق است.

$$t \overset{h}{\mapsto} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

تابع $h(t)$ در نقطه‌ی $t = t_۰$ دارای ماکزیمم مطلق است. پس $h'(t_۰) = ۰$. پس

$$\frac{\partial f\big(x(t), y(t), z(t)\big)}{\partial t}(t_۰) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = ۰$$

پس در نقطه‌ی p داریم:

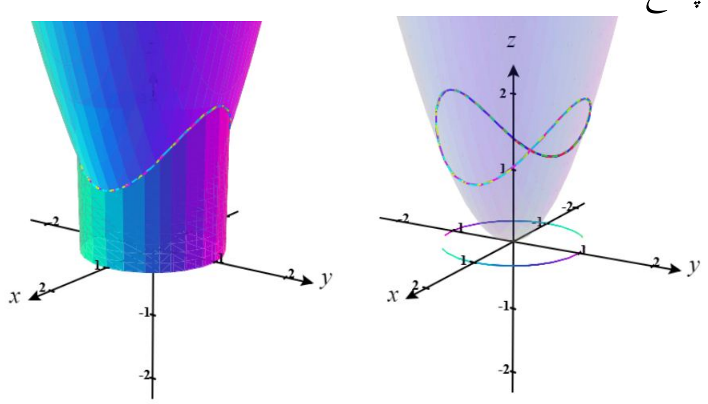
$$\overrightarrow{\nabla f} \cdot r'(t) = ۰ \Rightarrow \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \perp r'(t_۰)$$

خلاصه ۲۰۰. ∇f بر تمام بردارهای $r'(t)$ برای منحنی‌های گذرنده از p عمود است. پس ∇f بر صفحه‌ی مماس بر g در نقطه‌ی p عمود است. از طرفی ∇g نیز در همان نقطه بر صفحه‌ی مماس عمود است. پس

$$\nabla f || \nabla g$$

مثال ۲۰۱. حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x,y) = x^۲ + ۲y^۲$ را روی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ را تعیین کنید.

پاسخ.



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = k \end{cases} = \begin{cases} ۲x = \lambda(۲x) \\ ۴y = \lambda(۲y) \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

از معادله‌ی $۲x = \lambda(۲x)$ نتیجه می‌گیریم که یا $x \neq ۰$ و $\lambda = ۱$؛ یا $x = ۰$. از معادله‌ی $۴y = \lambda(۲y)$ و معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و جواب‌های معادله‌ی قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$(۱) \quad \lambda = ۱ \to y = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow (\pm ۱, ۰)$$

$$(۲) \quad x = ۰ \to y = \pm ۱ \Rightarrow (۰, \pm ۱)$$

پس مینی‌موم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(۱,۰) = f(-۱,۰) = ۱$$

و ماکزیمم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(۰/۱) = f(۰,-۱) = ۲$$

□

۲۷ جلسه‌ی بیست و هفتم، دوشنبه

۱.۲۷ ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ

گفتیم که برای تعیین اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y,z)$ تحت قید $g(x,y,z) = k$ باید دستگاه زیر با چهارمعادله با چهار مجهول x, y, z, λ را حل کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

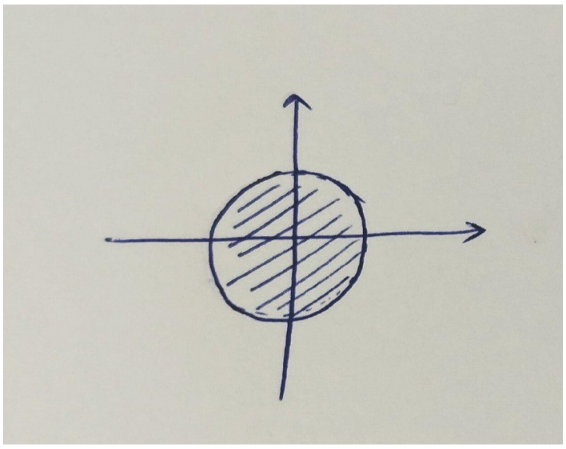
مثال ۲۰۲. ماکزیمم و مینیمم های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + ۲y^۲$ را روی دیسک $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ بیابید.

پاسخ. مراحل پاسخ به صورت زیر هستند:

۱) تعیین نقاط بحرانی تابع در درون دیسکِ $x^۲ + y^۲ < ۱$. ۲) تعیین اکسترمم های مطلق تابع روی مرزِ $x^۲ + y^۲ = ۱$.

مرحله‌ی اول:

$$f_x(x,y) = ۲x \qquad f_y(x,y) = ۴y$$



پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ نقطه ی بحرانی است.

$$f(۰,۰) = ۰$$

مرحله‌ی دوم: تعیین اکسترمم های تابع $f = x^۲ + ۲y^۲$ تحت قید $x^۲ + y^۲ = ۱$

$$\begin{cases} ۲x = ۲x\lambda \Rightarrow x = ۰ \quad or \quad \lambda = ۱ \\ ۴y = ۲y\lambda \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$

از معادله ی سوم:

$$x = ۰ \Rightarrow y = \pm ۱$$

نقاط: $(۰, \pm ۱) \quad (\pm ۱, ۰)$

$$\underbrace{f(۰,۰) = ۰}_{\text{مینی‌موم مطلق}} \qquad f(\pm ۱, ۰) = ۱ \qquad \underbrace{f(۰, \pm ۱) = ۲}_{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

$\square$

مثال ۲۰۳. نقطه ای روی صفحه ی $x+۴y+۳z=۲$ پیدا کنید که تابع $f(x,y,z)=۲x^۲+۳y^۲+z^۲$ در آن نقطه دارای کمترین مقدار باشد.

پاسخ. استفاده از روش ضرایب لاگرانژ:

$$\begin{cases} ۱=\lambda(۴x)\rightarrow x=\frac{۱}{۴\lambda} \\ ۴=\lambda(۶y)\rightarrow y=\frac{۲}{۳\lambda} \\ ۳=\lambda(۲z)\rightarrow z=\frac{۳}{۲\lambda} \\ x+۴y+۳z=۲\rightarrow \frac{۱}{۴\lambda}+۴(\frac{۲}{۳\lambda})+۳(\frac{۳}{۲\lambda})=۲ \end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{۳+۳۲+۱۸}{۱۲\lambda}=\frac{۵۳}{۱۲\lambda}=۲$$

$$\longrightarrow \lambda=\frac{۵۳}{۲۴}\simeq ۲/۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۴\times ۲/۲} \quad y=\frac{۴}{۳\times ۲/۲} \quad z=\frac{۳}{۲\times ۲/۲}$$

$\square$

مثال ۲۰۴. حداکثر حجم یک جعبه ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که با $۱۲m^۲$ مقوا ساخته شود.
راهنمایی: از روش ضرایب لاگرانژ با قید و تابع زیر استفاده کنید:

$$\begin{cases} ۲xy+۲yz+xz=۱۲ \\ V=xyz \end{cases}$$

مثال ۲۰۵. از بین مثلث ها، مثلثی رابیابید که مجموع سینوس زوایای آن حداکثر شود.
راهنمایی: $f(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)=\sin\theta_۱+\sin\theta_۲+\sin\theta_۳$ تحت قید $\theta_۱+\theta_۲+\theta_۳=\pi$

مثال ۲۰۶. سه عدد بیابید که حاصل جمع آنها ۱۲۰۰ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

مثال ۲۰۷. سه عدد بیابید که حاصل ضرب آنها n شود و مجموع مربعات آنها حداکثر شود .
راهنمایی:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲ \\ xyz=n \end{cases}$$

مثال ۲۰۸. اکسترمم های توابع زیر را تحت قید داده شده بیابید.
الف)

$$\begin{cases} f(x,y,z)=x+y+z \\ g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۳=۰ \end{cases}$$

ب)

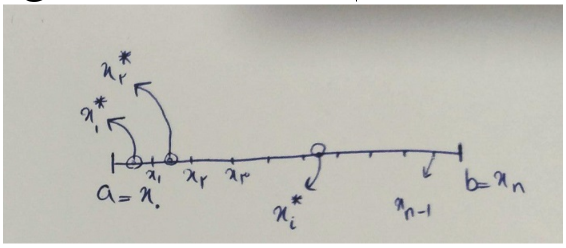
$$\begin{cases} f(x,y,z)=x^۲+\gamma y^۲ \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱ \end{cases}$$

مثال ۲۰۹. نقاطی روی بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ پیدا کنید که فاصله ی آنها تا مبدأ حداقل باشد.

پاسخ. کافی است مینیموم مطلق تابع $x^2 + y^2 + z^2$ را تحت قید $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ بیابیم. (روش ضرایب لاگرانژ) □

۲.۲۷ انتگرال دوگانه

پیش از آنکه بخواهم دربارەی انتگرال دوگانه توضیح دهم، لازم می‌دانم مفاهیمی ضروری را از درس ریاضی ۱ یادآوری کنم.



فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که روی بازەی بستەی $[a, b]$ تعریف شده است. این بازه را به n قسمت با طولهای مساوی تقسیم کنید. طول هر قسمت برابر خواهد بود با:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$

از بازەی i ام عنصرِ x_i^* را انتخاب کنید و **جمع ریمانی** زیر را بسازید.

$$\Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

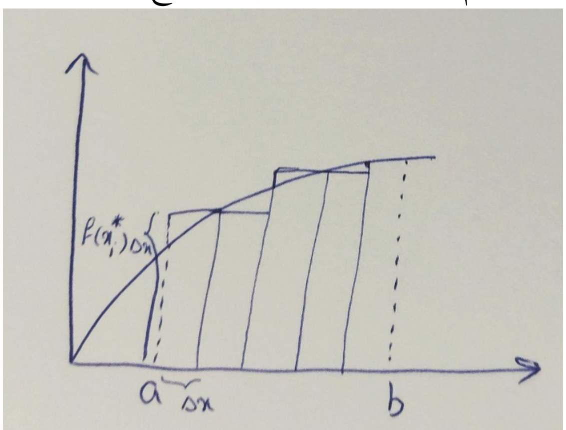
حال اگر تعداد بازه‌ها در این تقسیم بندی را زیاد کنیم، می‌توانیم به حد زیر می‌رسیم:

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

اگر حاصل حد بالا موجود باشد، تابع f را در $[a, b]$ **انتگرال پذیر** می خوانیم و می نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

نیز گفتیم که از لحاظ هندسی، اگر تابع مورد نظر مثبت باشد، حد بالا در واقع مساحت زیر منحنی تابع را نشان می‌دهد.



عموماً برای محاسبەی انتگرال از قضیەی اساسی استفاده می‌کردیم. بنا به این قضیه، مفهوم انتگرالگیری به نوعی دوگان

مفهوم مشتق‌گیری است.

قضیه ی اساسی حسابان:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به بیان دیگر اگر تابع F را به صورت زیر تعریف کنیم

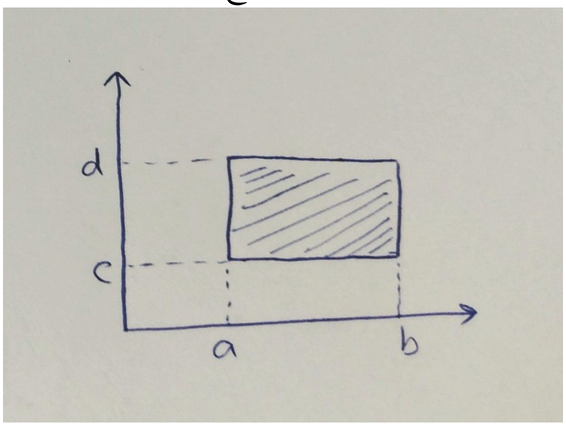
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

آنگاه

$$F'(x) = f(x)$$

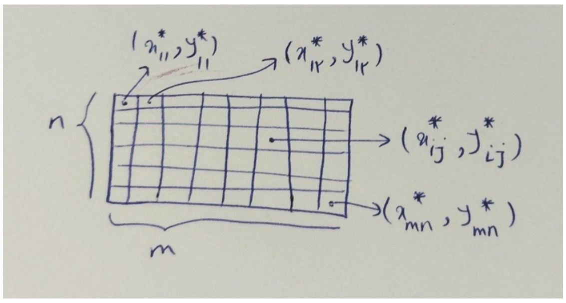
۳.۲۷ جمع‌های ریمانی دوگانه

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که روی ناحیه ی مستطیلی R به صورت زیر تعریف شده باشد.



$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

دامنه ی R را به صورت مقابل به $n \times n$ قسمت با مساحتهای مساویِ ΔA تقسیم بندی می کنیم.



از هرکدام از مستطیل های ایجاد شده نقطه ای به دلخواه، مثلاً نقطه‌ی (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را، انتخاب می کنیم و **جمع ریمانی** را می سازیم:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{ij=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

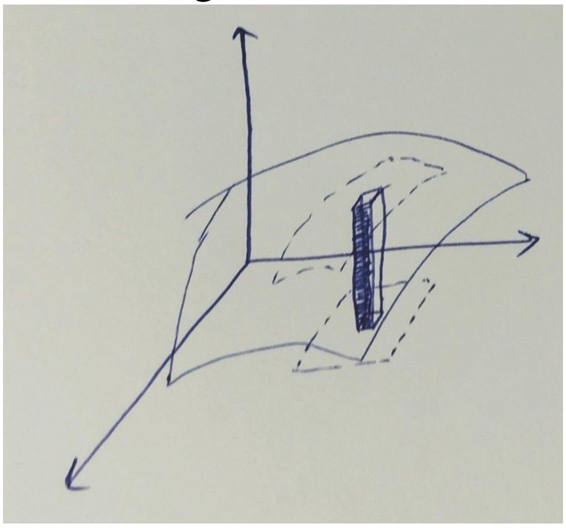
تعریف ۲۱۰. تابع f را در ناحیه ی مستطیلی R انتگرال پذیر می خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{ij=۱}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

و در این صورت می نویسیم:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{ij=۱}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

تعبیر هندسی: فرض کنید تابع $f(x,y) \geqslant ۰$ روی ناحیه ی مستطیلی R تعریف شده باشد.

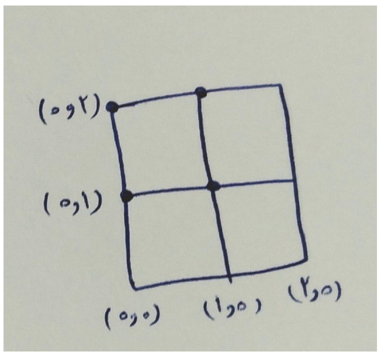


عبارت

$$f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

حجم یک مکعب مستطیل را نشان می‌دهد که مقطع آن ΔA است. حاصل جمع حجم این مکعب مستطیلها در واقع تقریبی برای حجم جسم واقع شده بر زیر رویه‌ی $z = f(x,y)$ و بالای ناحیه‌ی مستطیلیِ R است. بنابراین $\iint_R f(x,y)dA$ بیانگر حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی $f(x,y)$ و بالای مستطیل R است.

مثال ۲۱۱. حجم جسمی را که بالای مستطیل $R = [۰,۲] \times [۰,۲]$ و زیر سهمی وار بیضوی $z = ۱۶ - x^۲ - ۲y^۲$ واقع شده است ، تقریب بزنید



پاسخ.

$$f(۰,۲) = ۸ \qquad f(۰,۱) = ۱۴$$

$$f(۱,۲) = ۷ \qquad f(۱,۱) = ۱۳ \qquad \Delta A = ۱$$

[۱۳] حجم مورد نظر $\approx ۱(۸ + ۷ + ۱۴ + ۱۳) = ۴۲$ $\square$

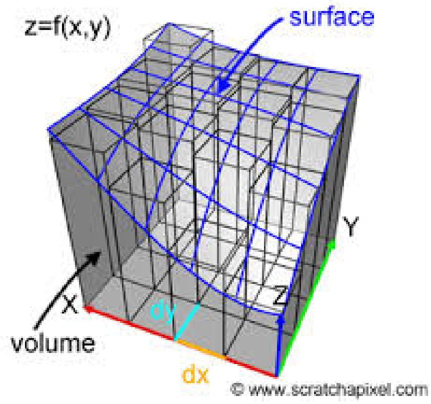
[۱۳] زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

۲۸ جلسه‌ی بیست و هشتم

۱.۲۸ انتگرال دوگانه

در جلسات قبل گفتیم که جمعهای ریمانی در واقع تقریبی برای حجم یک ناحیه به دست می‌دهند و با حدگیری از آنها به انتگرال دوگانه می‌رسیم.

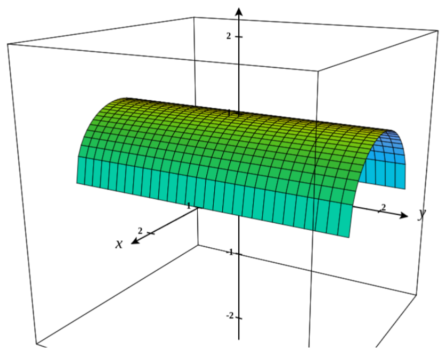
$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} f(x,y)_{i,j}\Delta A = \iint_R f(x,y)dA$$



مثال ۲۱۲. فرض کنید $R=\{(x,y)| -۱\leqslant x\leqslant ۱, -۲\leqslant y\leqslant ۲\}$. حاصل $\iint_R \sqrt{۱-x^۲}dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. بنابر آنچه گفته شد، کافی است حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی $z=\sqrt{۱-x^۲}$ و بالای $\mathbf{R}$ را محاسبه کنیم. حجم نیم استوانه برابر است با

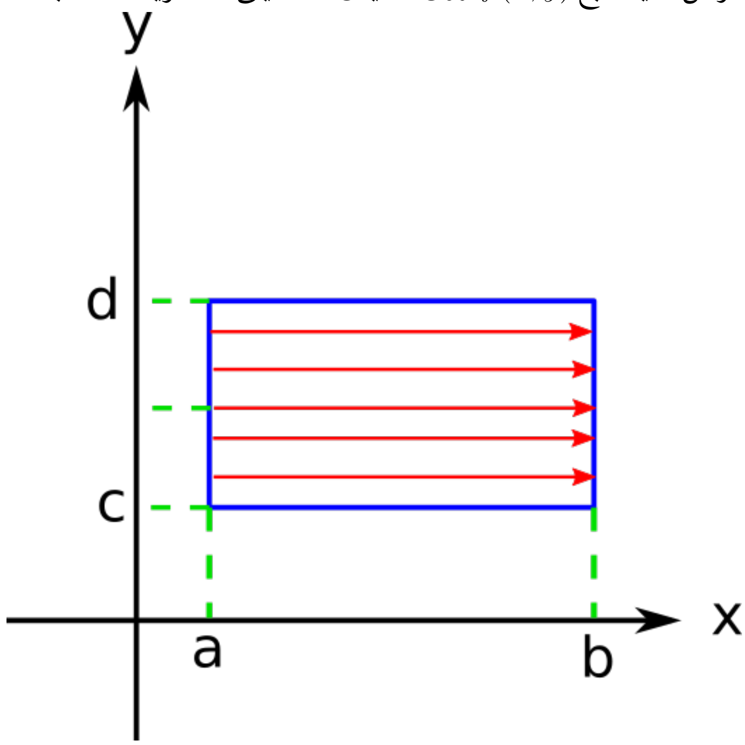
$$\frac{۴\pi}{۲}=۲\pi$$



□

۱.۱.۲۸ انتگرال جزئی

فرض کنید تابع $f(x,y)$ روی ناحیه‌ی مستطیلی R تعریف شده باشد.

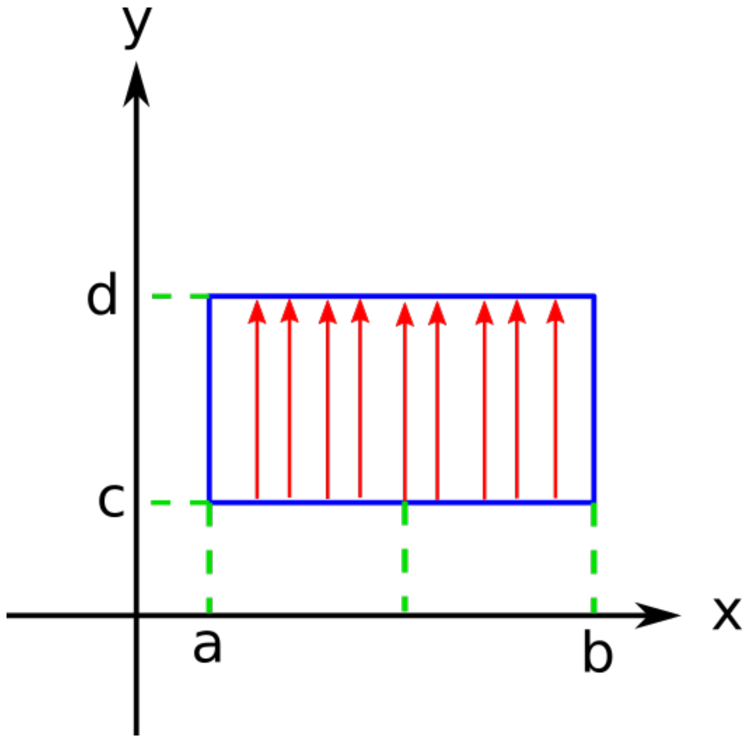


برای عدد دلخواه y در بازه‌ی $[c,d]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)dx \to x \text{ انتگرال جزئی نسبت به }$$

عبارت بالا برای هر y دلخواه قابل تعریف است. پس تابع زیر را داریم:

$$y \xrightarrow{h} \int_a^b f(x,y)dx$$



به طور مشابه برای x دلخواه در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(x)=\int_c^d f(x,y)dy \to y \text{ انتگرال جزئی نسبت به }$$

تعریف ۲۱۳.

$$(*)\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx := \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx$$

بنا بر آنچه در بالا گفته شد، محاسبه‌ی انتگرال $(*)$ یعنی محاسبه‌ی

$$\int_a^b h(x)dx$$

تعریف ۲۱۴.

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy := \int_c^d\Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{h(y)}\Big)dy$$

تمرین ۶۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int_۰^۳\int_۱^۲ x^۲ydydx$

پاسخ.

$$\int_۱^۲ x^۲ydy = x^۲\frac{y^۲}{۲}|_۱^۲ = ۲x^۲-\frac{x^۲}{۲}=\frac{۳}{۲}x^۲$$

$$\int_۰^۳\int_۱^۲ x^۲ydydx=\int_۰^۳\frac{۳}{۲}x^۲dx=\frac{x^۳}{۲}|_۰^۳=\frac{۲۷}{۲}$$

□

۲. $\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{۳} x^{۲}ydxdy$

پاسخ.

$$\int_{۰}^{۳} x^{۲}ydx = \frac{x^{۳}}{۳}y|_{۰}^{۳} = \frac{۲۷}{۳}y$$

$$\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{۳} x^{۲}ydxdy = \int_{۱}^{۲}\frac{۲۷}{۳}ydy = \frac{۲۷}{۳}\frac{y^{۲}}{۲}|_{۱}^{۲} = \frac{۲۷}{۲}$$

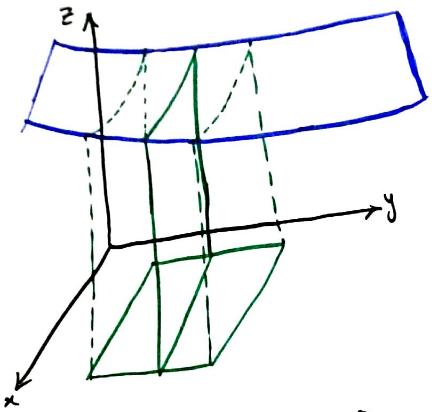
□

در بالا دیدیم که با تعویض ترتیب انتگرالگیری به جوابهای یکسانی رسیدیم. این امر تحت شرایط قضیه‌ی زیر همواره درست است:

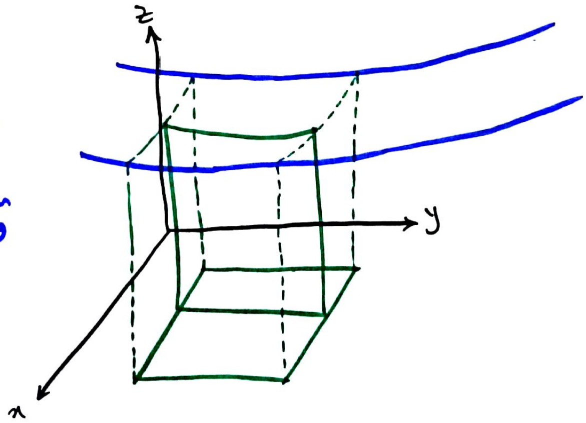
قضیه ۲۱۵ (فوبینی). اگر تابع f در ناحیه‌ی مستطیلی R (یعنی $R=[a,b]\times[c,d]$) پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dydx = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$$

توجیه هندسی



توجیه هندسی
قضیه فوبینی



۲۹ جلسه‌ی بیست و نهم، شنبه

در جلسات قبل درباره‌ی قضیه ی فوبینی صحبت کردیم:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

یکی از مواهب این قضیه این است که گاهی تغییر ترتیب انتگرالگیری، انتگرالگیری را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۲۱۶. $\iint_R y\sin(xy)dA$ را محاسبه کنید که در آن $R=[۱,۲]\times[۰,\pi]$. (ترتیب مناسب انتگرالگیری را خودتان تشخیص دهید).

پاسخ.

$$\int_۱^۲ \int_۰^\pi y\sin(xy)dydx = \int_۰^\pi \int_۱^۲ y\sin(xy)dxdy$$

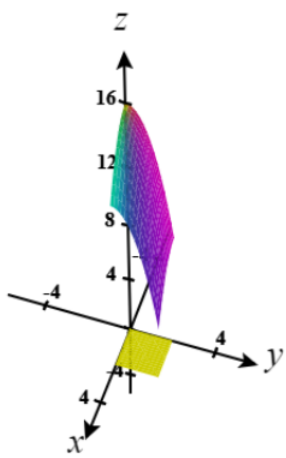
$$\int_۱^۲ y\sin(xy)dx = -\cos(xy)|_۱^۲ = -\cos(۲y)+\cos(y)$$

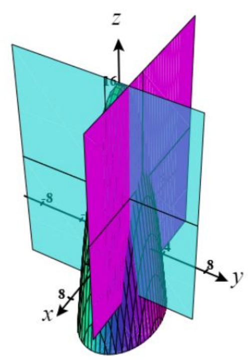
$$\int_۰^\pi (-\cos(۲y)+\cos(y))dy = \Big(\frac{-\sin(۲y)}{۲}+\sin(y)\Big)|_۰^\pi = ۰$$

□

مثال ۲۱۷. حجم جسمی را بیابید که توسط سهمی‌وار بیضوی $x^۲+۲y^۲+z=۱۶$ و صفحات $x=۲$ و $y=۲$ و صفحات مختصات احاطه شده است.

اثبات.





ناحیه‌ی انتگرالگیری برابر است با

$$D=\{(x,y)|۰\leqslant x\leqslant ۲, ۰\leqslant y\leqslant ۲\}$$

$$\int_۰^۲\int_۰^۲ (۱۶-x^۲-۲y^۲)dydx$$

$$\int_۰^۲ (۱۶-x^۲-۲y^۲)dy = (۱۶y-yx^۲-\frac{۲}{۳}y^۳)|_۰^۲ = ۳۲-۲x^۲-\frac{۱۶}{۳}-۰ = \frac{۸۰}{۳}-۲x^۲$$

$$\int_{۰}^{۲} (\frac{۸۰}{۳} - ۲x^۲)dx = (\frac{۸۰}{۳}x - \frac{۲}{۳}x^۳)|_{۰}^{۲} = \frac{۱۶۰}{۳} - \frac{۱۶}{۳} = \frac{۱۴۴}{۳} = ۴۸$$

$\square$

توجه ۲۱۸. حواستان باشد که انتگرال دوگانه، حاصلضرب دو تا انتگرال یگانه نیست:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \neq \int_a^b f(x,y)dx \times \int_c^d f(x,y)dy$$

توجه ۲۱۹. با این حال اگر f فقط تابعی از x و g فقط تابعی از y باشد داریم:

$$\int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x)g(y)dy}_{A}\, dx$$

$$A = \int_c^d f(x)g(y)dy = f(x)\int_c^d g(y)dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)dydx = \int_a^b Adx = \int_a^b f(x)\int_c^d g(y)dydx = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy$$

تمرین ۶۵. انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱. $\int_{۱}^{۴}\int_{۱}^{۲}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})dydx$

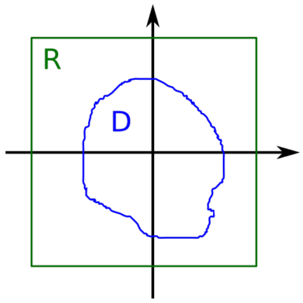
۲. $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱} xy\sqrt{x^۲ + y^۲}dydx$

تمرین ۶۶. حجم جسمی را بیابید که توسط رویه‌ی $z = ۱ + x^۲ye^y$ و صفحات $\begin{cases} z = ۰ \\ x = \pm۱ \\ y = ۰ \\ y = ۱ \end{cases}$ احاطه شده است.

۱.۲۹ انتگرالگیری در نواحی کلی

درباره‌ی انتگرالگیری در نواحی مستطیلی در جلسات پیش سخن گفتیم. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه در $\mathbb{R}^۲$ باشد. تابع f را روی این ناحیه انتگرالپذیر می‌خوانیم هرگاه تابع F تعریف شده به صورت زیر، در ناحیه‌ای مستطیلی شامل D انتگرالپذیر باشد.

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ ۰ & (x,y) \in R - D \end{cases}$$

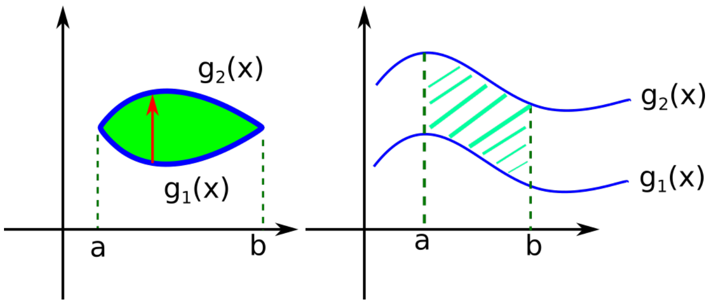


محاسبه‌ی انتگرال در نواحی کلی چندان آسان نیست؛ لیکن در نواحی خاصی می توان انتگرال را آسانتر حساب کرد. در زیر درباره‌ی این نواحی و نحوه‌ی انتگرالگیری در آنها سخن گفته‌ایم.

۱.۱.۲۹ نواحی نوع اول

نواحی به صورت زیر را نوع اول می‌خوانیم:

$$D = \{(x, y)|a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$



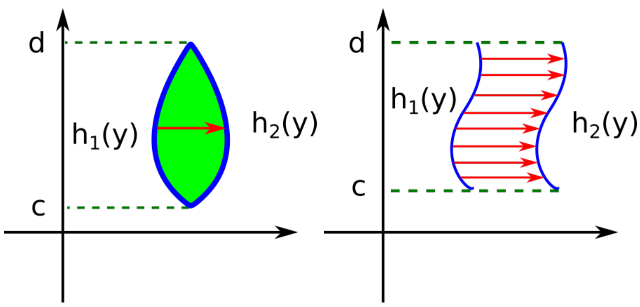
اگر D یک ناحیه‌ی نوع اول مانند بالا باشد داریم:

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy}_{x \text{ تابعی از }} dx$$

۲.۱.۲۹ نواحی نوع دوم

نواحی مانند D در زیر را نواحی نوع دوم می‌خوانیم:

$$D = \{(x, y)|c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$



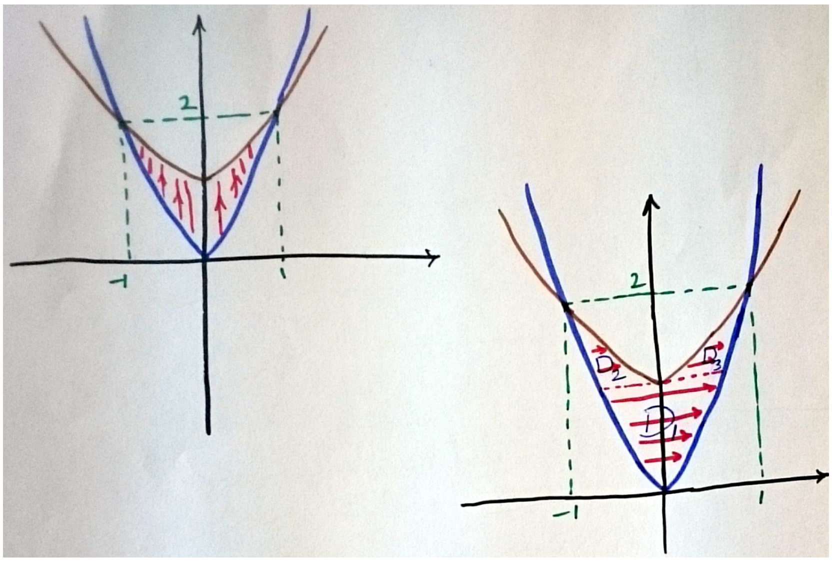
اگر D یک ناحیه‌ی نوع دوم باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx}_{y \text{ تابعی از }} dy$$

مثال ۲۲۰. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین سهمی‌های $y = ۲x^۲$ و $y = ۱ + x^۲$ باشد. آنگاه $\iint_D (x + ۲y)dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. ابتدا ناحیه‌ی انتگرالگیری را ترسیم می‌کنیم.

$$۱ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$



D را می‌توان یک ناجیه‌ی نوع اول در نظر گرفت و به صورت زیر انتگرالگیری کرد:

$$\iint_D (x + ۲y)dA = \int_{-۱}^{۱} \int_{۲x^۲}^{۱+x^۲} (x + ۲y)dydx$$

$$\int_{۲x^۲}^{۱+x^۲} (x + ۲y)dy = xy|_{۲x^۲}^{۱+x^۲} + y^۲|_{۲x^۲}^{۱+x^۲} = x(۱ + x^۲ - ۲x^۲) + (۱ + x^۲)^۲ - ۴x^۴ =$$

$$-۳x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱$$

$$\int_{-۱}^{۱} (-۳x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱)dx = (\frac{-۳}{۵}x^۵ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + x)|_{-۱}^{۱} = \frac{۴۷}{۱۵}$$

D را می‌توان اجتماعی از نواحی نوع دوم در نظر گرفت و همین سوال را به صورت زیر حل کرد:

$$y = ۲x^۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{۲}}$$

$$\iint_{D_۱} (x + ۲y)dA = \int_۰^۱ \int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} (x + ۲y)dxdy$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} (x + ۲y)dx = (\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲yx)|_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{\sqrt{\frac{y}{۲}}} = ۴\sqrt{\frac{y}{۲}}y$$

$$\int_۰^۱ (\frac{۴}{\sqrt{۲}}\sqrt{y^۳})dy = \frac{۴}{\sqrt{۲}}\sqrt{y^۵}|_۰^۱ = \frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$$

$$\iint_{D_۲} (x + ۲y)dA = \int_۱^۲ \int_{-\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{-\sqrt{y-۱}} (x + ۲y)dxdy = \dots$$

$$\iint_{D_3}(x+2y)dA=\int_1^2\int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(x+2y)dxdy=\dots$$

□

مثال ۲۲۱. حجم جسمی را محاسبه کنید که زیر سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ و بالای ناحیه‌ی محصور شده توسط خطوط $y=2x$ و $y=x^2$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2=2x\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=2$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع دوم:

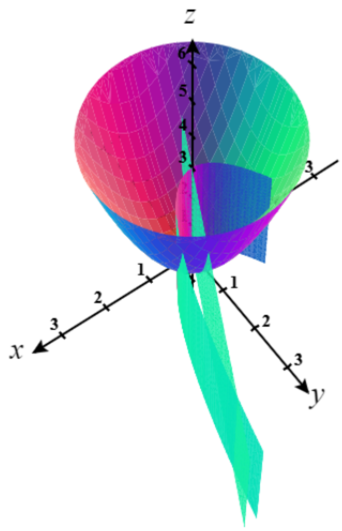
$$\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dxdy$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع اول:

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dydx$$

$$\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dy=(x^2y+\frac{y^3}{3})|_{x^2}^{2x}=2x^3+\frac{8}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}=\frac{14}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}$$

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dydx=\int_0^2(\frac{14}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3})dx=\Big(\frac{14}{12}x^4-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\Big)|_0^2$$



□

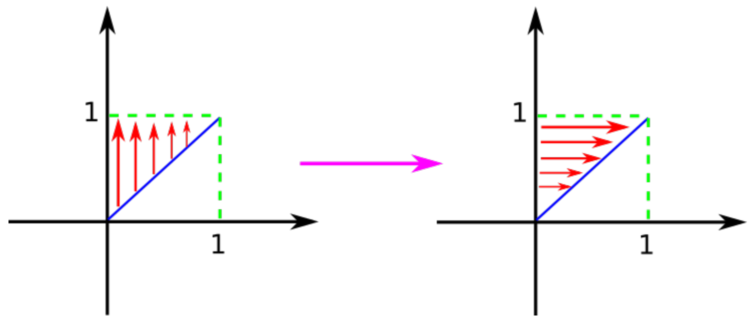
توجه ۲۲۲. هیچ نیازی نیست که هر سوالی را هم با در نظر گرفتن نواحی نوع اول و هم با در نظر گرفتن نواحی نوع دوم حل کنید. در مثالهای بالا تنها با اهداف آموزشی این کار را انجام داده‌ایم. در واقع، باید بتوانید نوعی از ناحیه را انتخاب کنید که شما را راحتتر به پاسخ انتگرال برساند.

۳۰ جلسه‌ی سی‌اُم دوشنبه

مثال ۲۲۳. $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)dxdy$$

$$\int_0^y \sin(y^2)dx = x\sin(y^2)|_0^y = y\sin(y^2)$$

$$\int_0^1 y\sin(y^2)dy = \frac{-\cos(y^2)}{2}|_0^1 = \frac{-\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}$$

□

۱.۳۰ ویژگی‌های انتگرال

۱. $\iint_D \Big(f(x,y) + g(x,y)\Big)dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$

۲. $\iint_D c \times f(x,y)dA = c \times \iint_D f(x,y)dA$

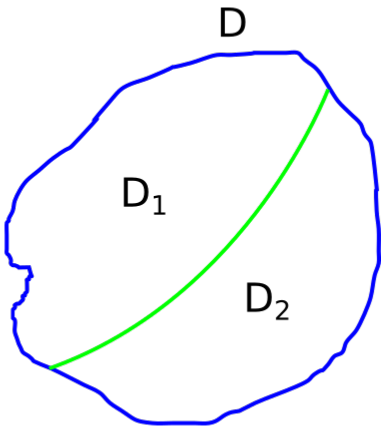
۳. اگر در ناحیه‌ی D داشته باشیم

$$f(x,y) \geqslant g(x,y)$$

آنگاه

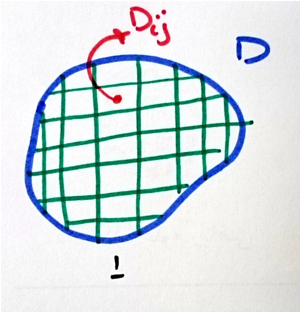
$$\iint_D f(x,y)dA \geqslant \iint_D g(x,y)dA$$

۴. $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$



۵. مساحت ناحیه‌ی D برابر است با

$$\iint_D \underbrace{f(x,y)}_{=۱} dA = \iint_D dA$$

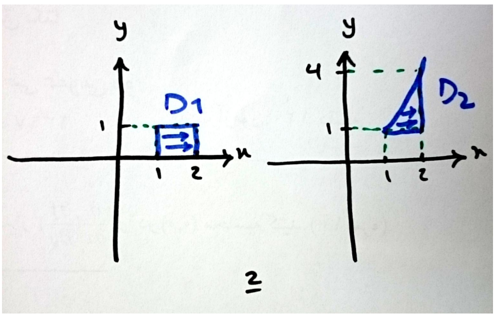


تمرین ۶۷. انتگرال مکرّرِ زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۰^۱ \int_۱^۲ \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dx dy + \int_۱^۴ \int_{\sqrt{y}}^۲ \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dx dy$$

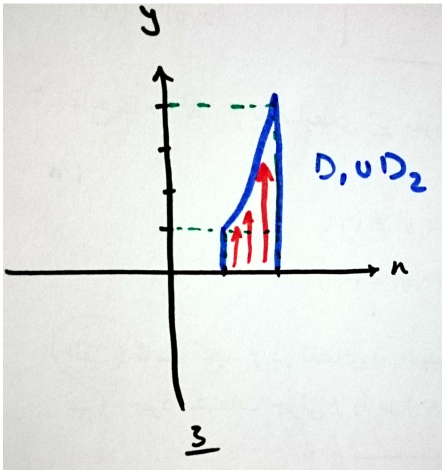
پاسخ.

$$\underbrace{\int_۰^۱ \int_۱^۲}_{D_۱} \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dx dy + \underbrace{\int_۱^۴ \int_{\sqrt{y}}^۲}_{D_۲} \frac{y}{x^۴} \sin(\frac{\pi x}{۲}) dx dy$$



اگر ناحیه‌ی $D_۱$ و ناحیه‌ی $D_۲$ اشتراک نداشته باشند آنگاه داریم

$$\iint_{D_۱} f(x,y) dA + \iint_{D_۲} f(x,y) dA = \iint_{D_۱ \cup D_۲} f(x,y) dA$$



بنا به شکل بالا ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{x^2} \frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dydx$$

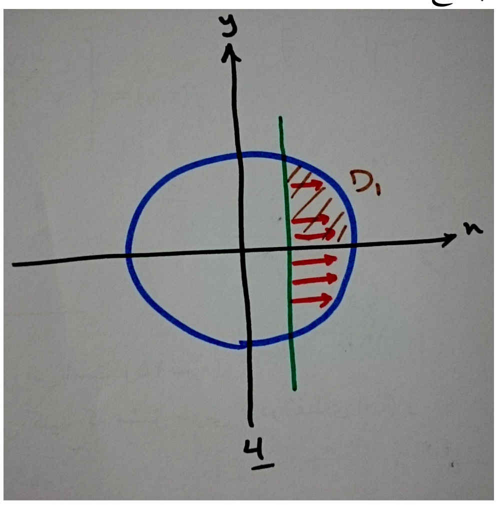
$$\int_{0}^{x^2} \frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dy = \frac{1}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})\int_{0}^{x^2} ydy = \frac{1}{2x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})y^2|_{0}^{x^2} = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})dx = \dots$$

$\square$

تمرین ۶۸. مساحت داخل دایره‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و سمت راست خط $x = 1$ را حساب کنید.

پاسخ.



$$\iint_D dA = \left(\iint_{D_1} dA\right) \times 2$$

$$\iint_{D_1} dA = \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dydx$$

$$\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy = y|_{0}^{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2}$$

$$\int_{۱}^{۲} \sqrt{۴ - x^{۲}}dx$$

$$x = ۲\sin\theta \Rightarrow dx = ۲\cos\theta d\theta$$

ادامه با شما. □

تمرین ۶۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

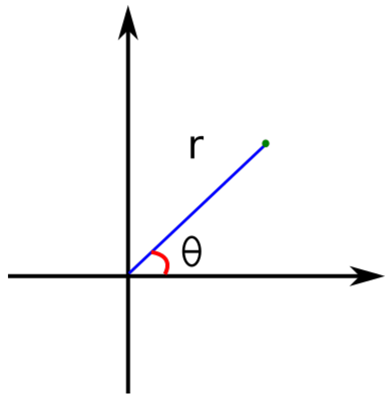
۱. $\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۴-x^{۲}} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dydx$

۲. $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dA$

D ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x + y = ۱$، $y = ۰$ و $x = ۰$ است.

۲.۳۰ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

هر نقطه در صفحه را می‌توان با مختصاتِ قطبیِ (r, θ) نمایش داد. تبدیلهای لازم برای این تغییر مختصات به صورت زیرند:



$$(x, y) = (r, \theta)$$

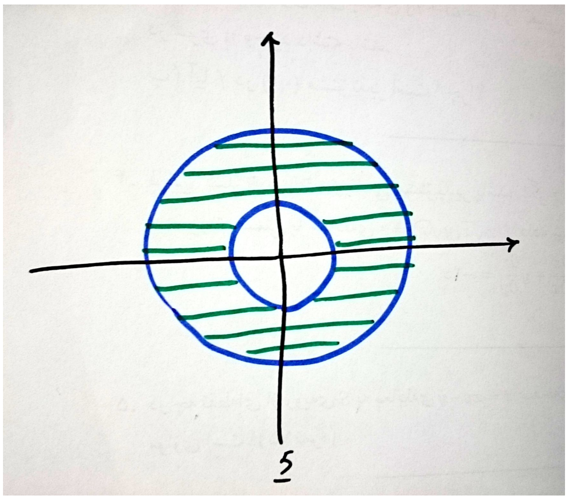
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$$

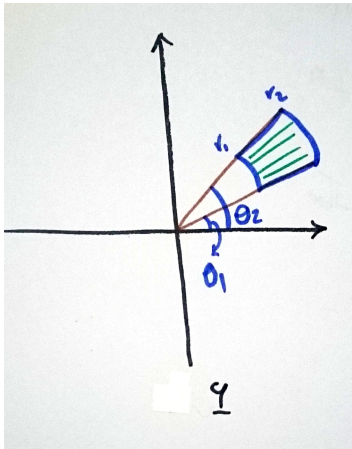
مجموعه‌ی زیر مثالی از یک **مستطیل قطبی** است.

$$D = \{(r, \theta) | ۱ \leqslant r \leqslant ۲, ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi\}$$



به طور کلّی به مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر، یک **مستطیل قطبی** گفته می‌شود.

$$D = \{(r,\theta) | r_{۱} \leqslant r \leqslant r_{۲}, \theta_{۱} \leqslant \theta \leqslant \theta_{۲}\}$$



قضیه ۲۲۴. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه باشد.

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

دقت کنید که اِلمانِ سطح، در انتگرال بالا به صورت زیر تغییر کرده است:

$$dxdy \approx rdrd\theta$$

توجه کنید که از ضرب کردنِ dx در dy به عبارتِ $rdrd\theta$ نمی رسیم. ضرب بالا قواعد خاص خود را دارد که پرداختن بدانها در سطح این درس نمی‌گنجد. پس اگر بنویسیم

$$x = r\cos\theta \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$$

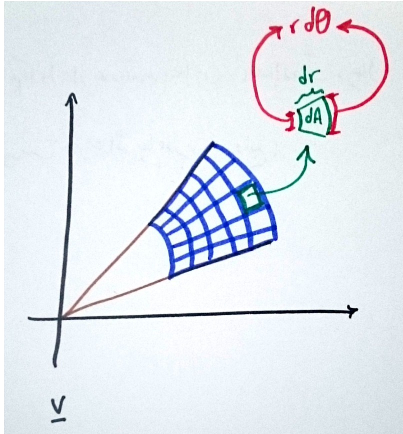
$$y = r\sin\theta \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$$

آنگاه

$$dxdy \neq rdrd\theta$$

هرچند قصد نداریم درباره‌ی ماهیت ضرب بالا توضیح دهیم، لازم است که فرمولِ $dxdy = rdrd\theta$ را توجیه کنیم.

توجیه اول. (توجیه نادقیق). عموماً در رویکرد مهندسی، مطابق شکل زیر، فرض کنیم که اِلمان مساحت، تقریباً مستطیلی‌شکل است. این مستطیل دارای اضلاع به اندازه‌ی $rd\theta$ و dr است. پس

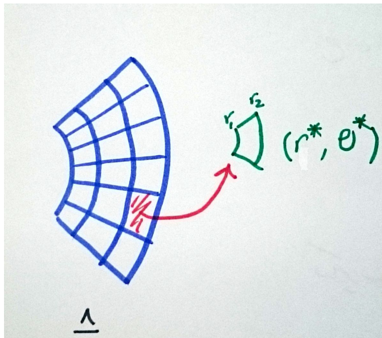


$$dA = dr(rd\theta) = rdrd\theta$$

توجیه دوم. برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات قطبی باید حاصل جمعی مانند زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_{r} \sum_{\theta} f\Big(x(r^*, \theta^*), y(r^*, \theta^*)\Big) dA$$

که در آن r^* و θ^* عناصری دلخواه هستند که از میان المانهای سطح انتخاب شده‌اند.



داریم

$$\Delta A = \frac{۱}{۲} r_۲^۲ \Delta\theta - \frac{۱}{۲} r_۱^۲ \Delta\theta$$

$$\Delta A = \frac{۱}{۲}(r_۲ - r_۱)(r_۲ + r_۱)\Delta\theta$$

می‌توانیم r^*, θ^* را نقاط وسطِ هر سطح کوچک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} r^* = \frac{r_۱ + r_۲}{۲} \\ \theta^* = \frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲} \end{cases}$$

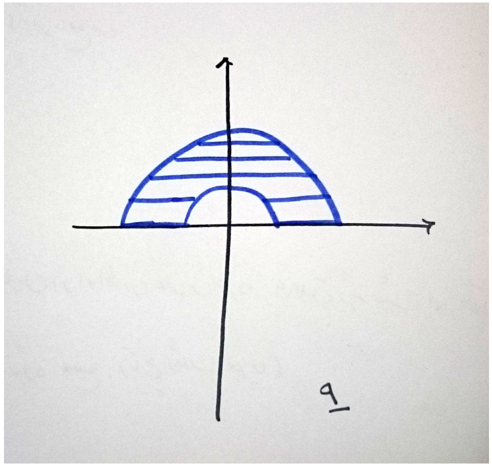
آنگاه داریم:

$$\Delta A = \Delta r(r^*)\Delta\theta = r^* \Delta r \Delta\theta$$

مثال ۲۲۵. $\iint_R (۳x + ۴y^۲) dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه‌ی محصور بین دوایر $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ و بالای محور مختصات است.

پاسخ.

$$D=\{(r,\theta)|۱\leqslant r\leqslant ۲, ۰\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$



$$\iint_R (۳x+۴y^۲)dA=\int_۱^۲\int_۰^\pi(۳r\cos\theta+۴r^۲\sin^۲\theta)rd\theta dr=$$

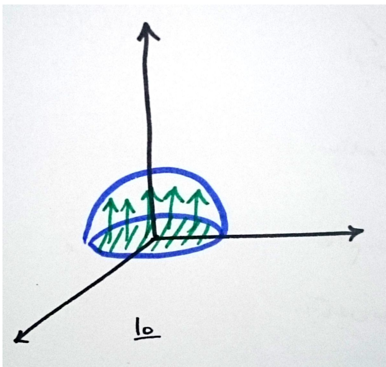
$$\int_۰^\pi\int_۱^۲ ۳r^۲\cos\theta drd\theta+\int_۰^\pi\int_۱^۲ ۴r^۳\sin^۲\theta drd\theta=$$

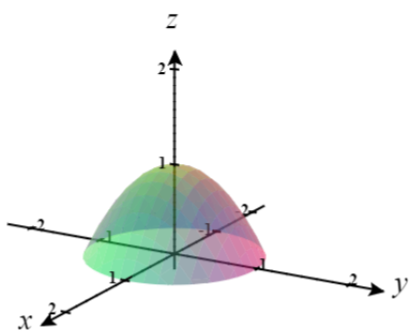
$$\int_۰^\pi\cos\theta d\theta\times\int_۱^۲ ۳r^۲dr+\int_۰^\pi\sin^۲\theta d\theta\times\int_۱^۲ ۴r^۳dr=\dots$$

برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_۰^\pi \sin^۲\theta d\theta$ کافیست که $\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$ را با $\sin^۲\theta$ جایگزین کنید. □

مثال ۲۲۶. حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه‌ی $z=۰$ و سهمی‌وار $z=۱-x^۲-y^۲$ احاطه شده است.

پاسخ.



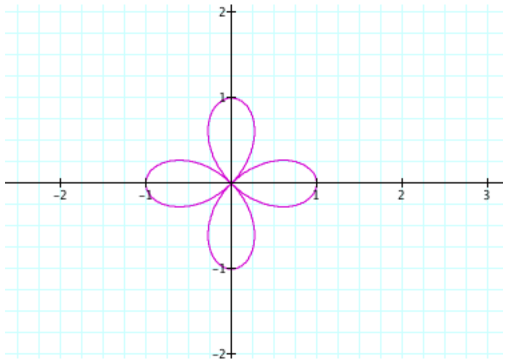


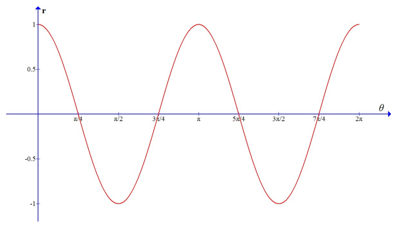
$$\iint_D f(x,y)dA=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(۱-r^۲)rdrd\theta=\dots$$

□

مثال ۲۲۷. مساحت محدود به گلِ رُزِ چهار برگ $r=\cos ۲\theta$ را حساب کنید.

پاسخ.





مساحت کل برابر است با چهار برابر مساحت قسمت یکی از گلبرگها:

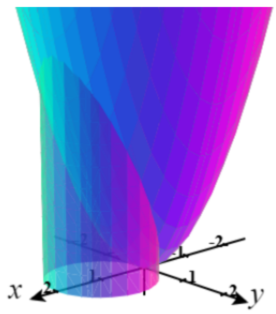
$$۴ \times \iint_D dA = ۴ \times \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{\cos ۲\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{۸}$$

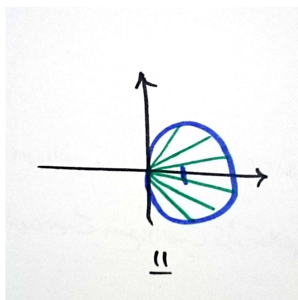
$\square$

مثال ۲۲۸. حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ و بالای صفحه‌ی xy و داخل استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۴$$





ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتربندی می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{۲} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

$$۰ \leqslant r \leqslant ۲ \cos \theta$$

دقت کنید که معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ به صورت $r^۲ = ۲r \cos \theta$ و از آنجا به صورت $r = ۲\cos(\theta)$ در آمده است و تابعِ $z = x^۲ + y^۲$ به صورتِ $r^۲$ نوشته شده است.

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۲\cos\theta} (r^۲) r dr d\theta$$

□

۳۱ جلسه‌ی سی و یکم، شنبه

بحث انتگرالگیری در مختصات قطبی را با نکته‌ی زیر به پایان می‌رسانیم.

توجه ۲۲۹. مختصات قطبی ابزار مناسبی برای محاسبه ی برخی انتگرالهای یگانه بدست می دهد.

مثال ۲۳۰. انتگرال ناسره‌ی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ رامحاسبه کنید.

یادآوری ۲۳۱.

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

پاسخ.

$$\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx \times \int_۰^\infty e^{-y^۲}dy = \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-x^۲-y^۲}dxdy = (\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx)^۲$$

$$\int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-x^۲-y^۲}dxdy = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^\infty e^{-r^۲}rdrd\theta = \frac{\pi}{۲}\int_۰^\infty e^{-r^۲}rdr = \frac{\pi}{۲}(\frac{e^{-r^۲}}{-۲})|_۰^\infty = \dots$$

$\square$

۱.۳۱ تغییر متغیر

گفتیم که در انتگرالگیری با مختصات قطبی، تغییر متغیر زیر را داریم:

$$dxdy = rdrd\theta$$

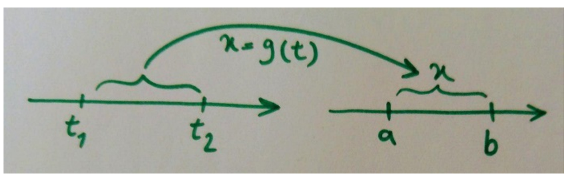
در ادامه‌ی درس، تغییر متغیر را به طور کلی بررسی می‌کنیم. نخست نکته‌ی زیر را از ریاضی ۱ یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۲۳۲. فرض کنید که $x = g(t)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که

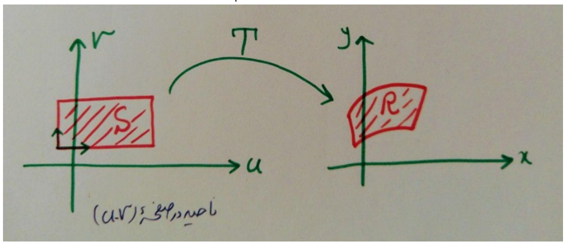
$$\int_{a=g(t_۱)}^{b=g(t_۲)} f(x)dx = \int_{t_۱}^{t_۲} \underbrace{f(g(t))}_{u}\underbrace{g'(t)dt}_{du}$$

به بیان دیگر

$$\int_{a=g(t_۱)}^{b=g(t_۲)} f(x)dx = \int_{t_۱}^{t_۲} f(x(t))\frac{\partial x}{\partial t}dt$$



در ادامه‌ی درس می‌خواهیم متناظر گفته‌ی بالا را برای انتگرال دوگانه به دست آوریم.



فرض کنید T یک نگاشت باشد که از مختصاتِ uv به مختصات xy می‌رود. به بیان دیگر نگاشت T به صورت زیر است:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که این نگاشت ویژگی توپولوژیک و آنالیزی مطلوبی داشته باشد (توابع $x(u,v), y(u,v)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند و ژاکوبین این نگاشت (که در ادامه تعریف خواهد شد، ناصفر باشد). چنین نگاشتی به گونه ای است که مرزهای ناحیه‌ی S (در شکل بالا) را به مرزهای ناحیه‌ی R می برد.

تحت شرطهای بالا، می‌توان انتگرالگیری در ناحیه‌ی R را به انتگرالگیری در ناحیه‌ی S تبدیل کرد:

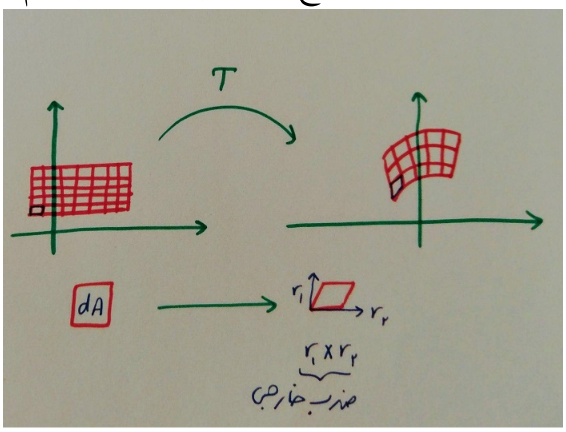
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \underbrace{|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|}_{\text{قدرمطلق}} dudv \qquad (*)$$

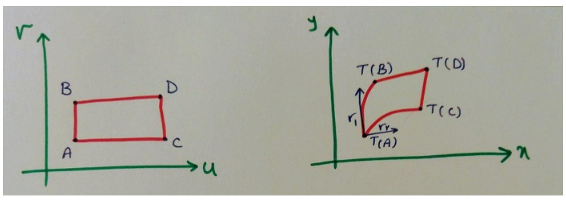
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

(ماتریس ژاکوبین تبدیل T)

دقت کنید که در فرمول $(*)$ علامت قدر مطلق آمده است، بنابراین اگر دترمینان منفی شود، آن را تبدیل به مثبت باید کرد.

ایده ی اثبات از دیدگاه هندسی: دقت کنید که یک المانِ مستطیلی به یک المان متوازی‌الاضلاع تبدیل شده است. بردارهای سازنده‌ی متوازی‌الاضلاع را در زیر محاسبه کرده‌ایم.





گوشه‌های مشخص شده در بالا را در زیر بزرگتر کشیده‌ایم:

توضیحات عکس:

$$A=(u_0,v_0)\quad,\quad B=(u_0,v_0+\Delta v)\quad,\quad C=(u_0+\Delta u,v_0)\quad,\quad D=(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$$

$$T(A)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))\qquad T(B)=(x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v))$$

$$T(C)=(x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0))\qquad T(D)=(x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v))$$

$$\overrightarrow{r_1}\approx T(B)-T(A)=(x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v))-(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))=$$
$$(x(u_0,v_0+\Delta v)-x(u_0,v_0),y(u_0,v_0+\Delta v)-y(u_0,v_0))$$
$$\simeq(\Delta v\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0),\Delta v\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0))=\Delta v(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v})$$

$$\overrightarrow{r_2}\approx T(C)-T(A)=(x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0))-(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))=$$
$$(x(u_0+\Delta u,v_0)-x(u_0,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0)-y(u_0,v_0))$$
$$\simeq(\Delta u\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\Delta u\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0))=\Delta u(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u})$$

$$dA=\text{مساحت ناحیه‌ی به صورت متوازی‌الاضلاع}=\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

$$dA=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}dudv$$

توجه ۲۳۳. روش فوق زمانی کار می کند که در ناحیه ی S داشته باشیم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

۲.۳۱ تغییر مختصات قطبی

حال فرمول بالا برای تغییر مختصات قطبی امتحان می‌کنیم.

$$x=r\cos\theta\qquad y=r\sin\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}:=det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

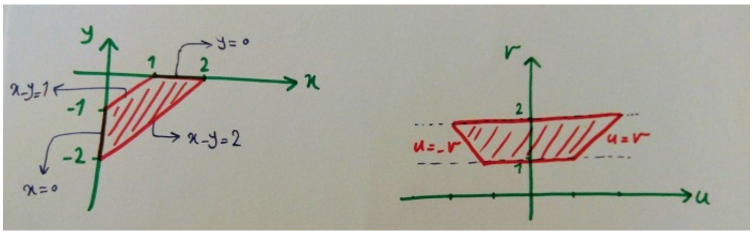
$$dA=dxdy=|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}|drd\theta=rdrd\theta$$

۳.۳۱ مثالها

مثال ۲۳۴. $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه ی ذوزنقه ای محدود به نقاط $(۰,-۲), (۰,-۱), (۲,۰), (۱,۰)$ است.

پاسخ.

$$u = x + y \qquad v = x - y$$



$$x = \frac{۱}{۲}(u+v) \qquad y = \frac{۱}{۲}(u-v)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\int_۱^۲ \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} |-\frac{۱}{۲}| dudv = \frac{۱}{۲} \int_۱^۲ \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} dudv$$

$$\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} dv = ve^{\frac{u}{v}} = v(e^۱ - e^{-۱})$$

$$\int_۱^۲ \int_{-v}^{v} \frac{۱}{۲} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{۱}{۲}(e - \frac{۱}{e}) \int_۱^۲ vdv = \frac{۱}{۲}(e - \frac{۱}{e}) \frac{v^۲}{۲}|_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(e - \frac{۱}{e}) \frac{۳}{۲}$$

□

مثال ۲۳۵. انتگرال دوگانه ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^۲ \sin(xy)}{y} dA$$

D ناحیه ی محدود به منحنی های $x^۲ = \pi y$ و $x^۲ = \frac{\pi y}{۲}$ و $y^۲ = x$ و $y^۲ = \frac{x}{۲}$ است.[۱۴]

[۱۴] از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۳۲ جلسه‌ی سی‌ودوم، انتگرالهای سه‌گانه

پیش از شروع درس مثال دیگری از تغییر متغیر حل می‌کنیم.

مثال ۲۳۶. انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^۲\sin(xy)}{y}dA$$

D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^۲=\pi y$ و $x^۲=\frac{\pi y}{۲}$ و $y^۲=x$ و $y^۲=\frac{x}{۲}$ است.

پاسخ.

$$u=\frac{x^۲}{y}\quad \frac{\pi}{۲}\leqslant u\leqslant \pi$$

$$v=\frac{y^۲}{x}\quad \frac{۱}{۲}\leqslant v\leqslant ۱$$

$$uv=\frac{x^۲y^۲}{xy}=xy$$

$$\iint_D \frac{x^۲\sin(xy)}{y}dA=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} u\sin(uv)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dvdu$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$y^۲=vx\Rightarrow x=\frac{y^۲}{v}$$

$$x^۲=uy\Rightarrow \frac{y^۴}{v^۲}=uy\Rightarrow y=v^{\frac{۲}{۳}}u^{\frac{۱}{۳}}$$

$$x=\frac{y^۲}{v}\Rightarrow x=v^{\frac{۱}{۳}}u^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=v^{\frac{۱}{۳}}\cdot\frac{۲}{۳}u^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=u^{\frac{۲}{۳}}\cdot\frac{۱}{۳}v^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{۱}{۳}u^{-\frac{۲}{۳}}\cdot v^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{۲}{۳}v^{-\frac{۱}{۳}}\cdot u^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=v^{\frac{۱}{۳}}\cdot\frac{۲}{۳}u^{-\frac{۱}{۳}}\cdot\frac{۲}{۳}v^{-\frac{۱}{۳}}\cdot u^{\frac{۱}{۳}}-u^{\frac{۲}{۳}}\cdot\frac{۱}{۳}v^{-\frac{۲}{۳}}\cdot\frac{۱}{۳}u^{-\frac{۲}{۳}}\cdot v^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{۹}-\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} u\sin(uv)\cdot\frac{۱}{۳}dvdu$$

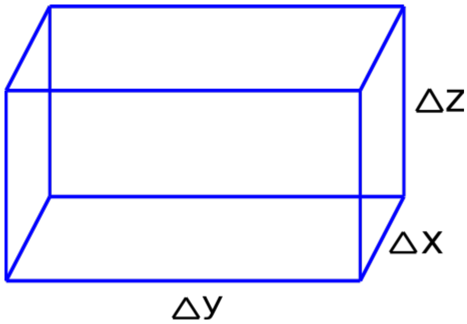
$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} u\sin(uv)\cdot\frac{۱}{۳}dv=\cos(uv)|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}=\cos u-\cos\frac{u}{۲}$$

$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(\cos u-\cos\frac{u}{۲})du=\dots$$

$\square$

۱.۳۲ انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید B یک ناحیه‌ی مکعبی با حدود معلوم زیر باشد و f تابعی از $\mathbb{R}^{۳}$ به $\mathbb{R}$ باشد:



$$B = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\iiint_B f(x,y,z)dv =$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

مثال ۲۳۷. انتگرال $\iiint_B xyz^{۲}dv$ را محاسبه کنید که در آن ناحیه‌ی B به صورت زیر است:

$$B = \{(x,y,z)| ۰ \leqslant x \leqslant ۱, -۱ \leqslant y \leqslant ۲, ۰ \leqslant z \leqslant ۳\}$$

$$\int_۰^۳ \int_{-۱}^۲ \int_۰^۱ xyz^{۲}dxdydz$$

$$\int_۰^۱ xyz^{۲}dx = \frac{x^{۲}}{۲}yz^{۲}|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}yz^{۲}$$

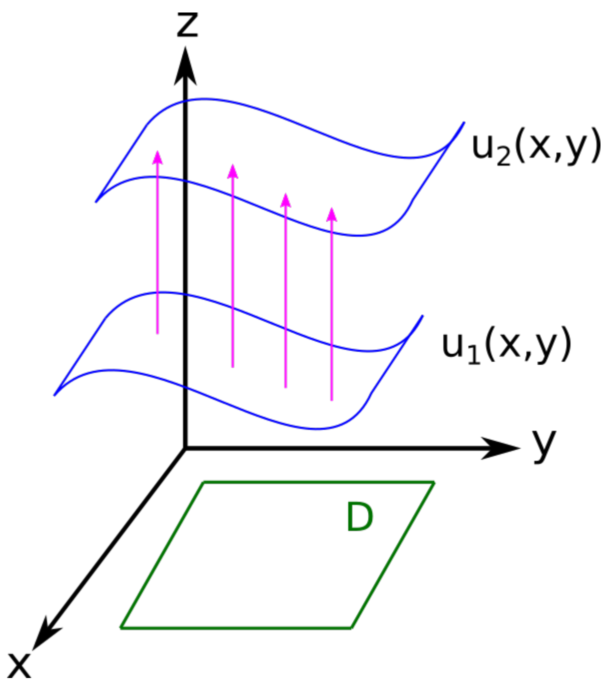
$$\int_{-۱}^۲ \frac{۱}{۲}yz^{۲}dy = \frac{y^{۲}}{۴}z^{۲}|_{-۱}^۲ = z^{۲} - \frac{z^{۲}}{۴} = \frac{۳z^{۲}}{۴}$$

$$\int_۰^۳ \frac{۳z^{۲}}{۴}dz = \frac{z^{۳}}{۴}|_۰^۳ = \frac{۲۷}{۴}$$

انتگرالگیری سه‌گانه تنها روی نواحی مکعبی صورت نمی‌گیرد. انتگرالگیری روی نواحی کلی کار آسانی نیست ولی اگر خوش‌شانس باشیم ناحیه‌ی انتگرالگیری ما ممکن است به صورت ساده‌تری باشد.

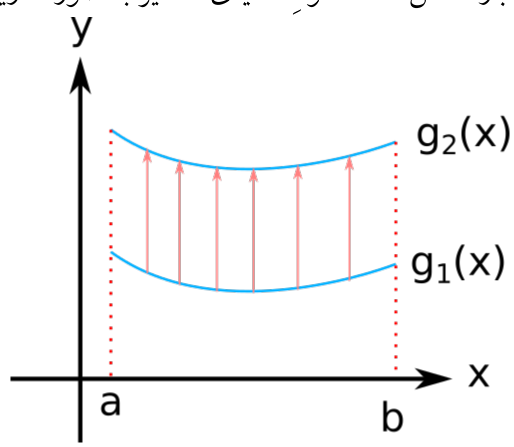
۱.۱.۳۲ نواحی ساده‌تر

$$B = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_۱(x,y) \leqslant z \leqslant u_۲(x,y)\}$$



$$\iiint_B f(x,y,z)dv = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA$$

باز ممکن است خودِ ناحیه‌ی D نیز به صورت زیر باشد:



آنگاه خواهیم داشت:

$$\iiint_B f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

وضعیتی که در بالا شرح داده شد، ممکن است با یک جابه‌جائی متغیرها برقرار باشد. مثلاً ممکن است ناحیه‌ی انتگرالگیری به صورت زیر باشد:

$$c \leq y \leq d \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \quad u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)$$

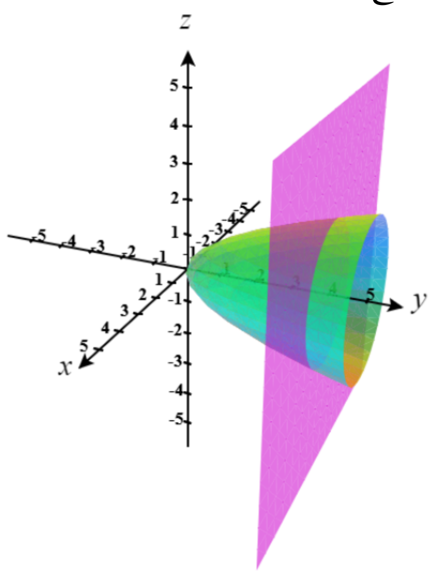
یا به صورت زیر:

$$r \leq z \leq s \quad g_1(z) \leq x \leq g_2(z) \quad u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)$$

سایر نواحی ممکن را شما بررسی و ترسیم کنید. همه‌ی آنچه درباره‌ی انتگرالگیری دوگانه فراگرفته‌ایم در محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه به کارمان می‌آید:

مثال ۲۳۸. $\iiint_E \sqrt{x^۲+z^۲}dv$ را محاسبه کنید که در آن E ناحیه‌ی محدود به سهمی‌وارِ $y = x^۲ + z^۲$ و صفحه‌ی $y = ۴$ است.

پاسخ.



ابتدا انتگرالی را که باید محاسبه کنیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\iint_D \left(\int_{x^۲+z^۲}^{۴} \sqrt{x^۲+z^۲}dy \right) dxdz = \iint_D \left(y\sqrt{x^۲+z^۲}|_{x^۲+z^۲}^{۴} \right) dxdz =$$

$$\iint_D \left(۴\sqrt{x^۲+z^۲} - (x^۲+z^۲)\sqrt{x^۲+z^۲} \right) dxdz$$

پس از اینجا به بعد با یک انتگرال دوگانه مواجهیم که آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\int_۰^{۲\pi} \int_۰^{۲} \left(۴r - r^۳ \right) rdrd\theta = ۲\pi \int_۰^{۲} \left(۴r^۲ - r^۴ \right) dr =$$

$$۲\pi(\frac{۴}{۳}r^۳ - \frac{r^۵}{۵})_۰^۲ = \frac{۱۲۸}{۱۵}\pi.$$

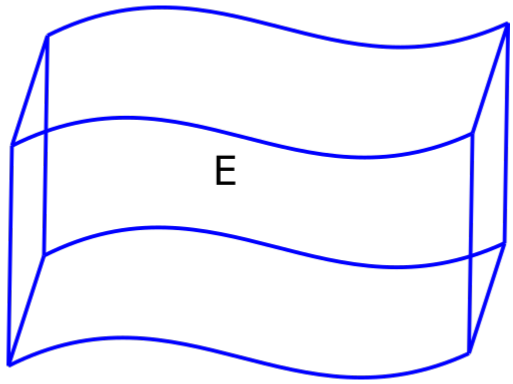
□

تمرین ۷۰. انتگرال $\int_۰^۱ \int_۰^{x^۲} \int_۰^y f(x,y,z)dzdydx$ را به صورت $\iiint f(x,y,z)dxdzdy$ بنویسید.

توجه ۲۳۹. در درسهای پیشین روشی برای محاسبه‌ی حجم با استفاده از انتگرال دوگانه ارائه کردیم ولی محاسبه‌ی احجام با استفاده از انتگرال سه‌گانه غالباً راحت‌تر است.

حجم ناحیه‌ی سه بُعدی E با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$v = \iiint_E dv$$

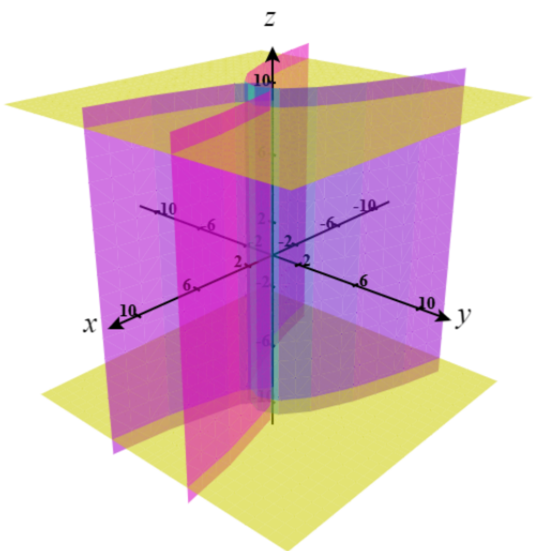


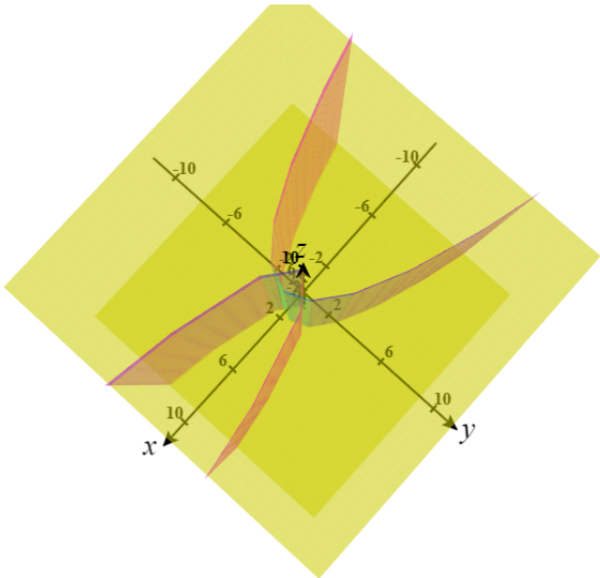
مثال ۲۴۰. حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ی $y^۲ = ۴ - ۳x$ و $y^۲ = x$ و صفحات $z = -۹$ و $z = ۹$ را محاسبه کنید.

پاسخ. حجم مورد نظر برابر است با

$$\iint_D \left(\int_{-۹}^{۹} dz\right) dA = \iint_D ۱۸ dA = ۱۸ \int_{-۱}^{۱} \int_{y^۲}^{\frac{۴-y^۲}{۳}} dx dy =$$

$$۱۸ \int_{-۱}^{۱} \left(\frac{۴ - y^۲}{۳} - y^۲\right) dy = \ldots \text{محاسبه‌ی پایانی به عهده‌ی شما}$$

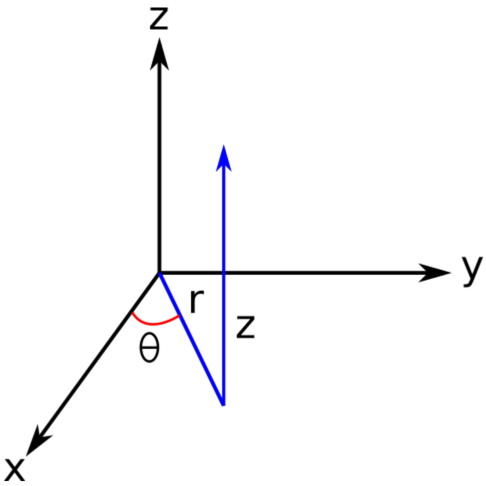




□

۲.۳۲ مختصات استوانه‌ای

برای محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه برای احجامی که حول یک محور، حالت استوانه‌ای دارند، تغییر متغیر استوانه‌ای کار را آسانتر می‌کند:



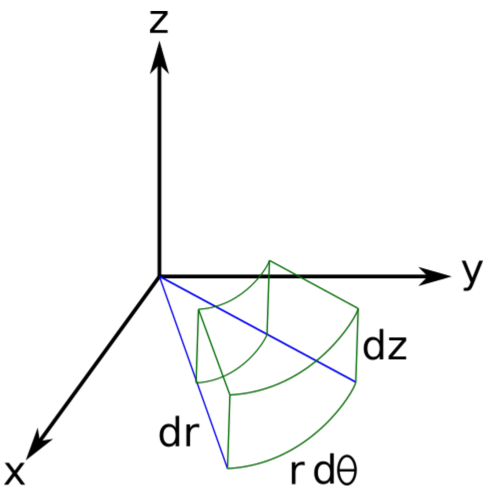
$$(x, y, z) \cong (r, \theta, z)$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

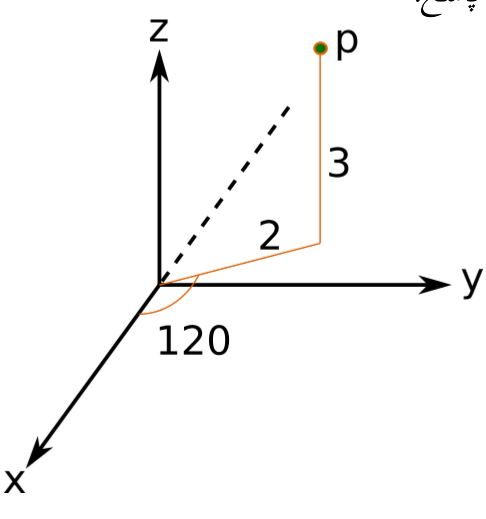
$$z = z$$

به وجود r دقت کنید $\quad dv = dxdydz \approx rdrd\theta dz$



مثال ۲۴۱. نقطه‌ی $(۲, \frac{۲\pi}{۳}, ۳)$ را در مختصات استوانه‌ای مشخص کنید.

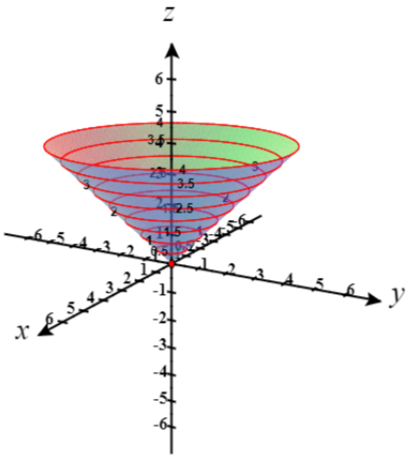
پاسخ.



□

مثال ۲۴۲. رویه‌ی $z = r$ را رسم کنید.

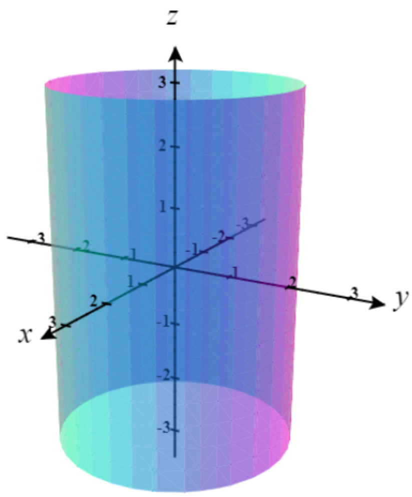
پاسخ.



□

مثال ۲۴۳. رویه‌ی $r = 2$ را رسم کنید.

پاسخ.



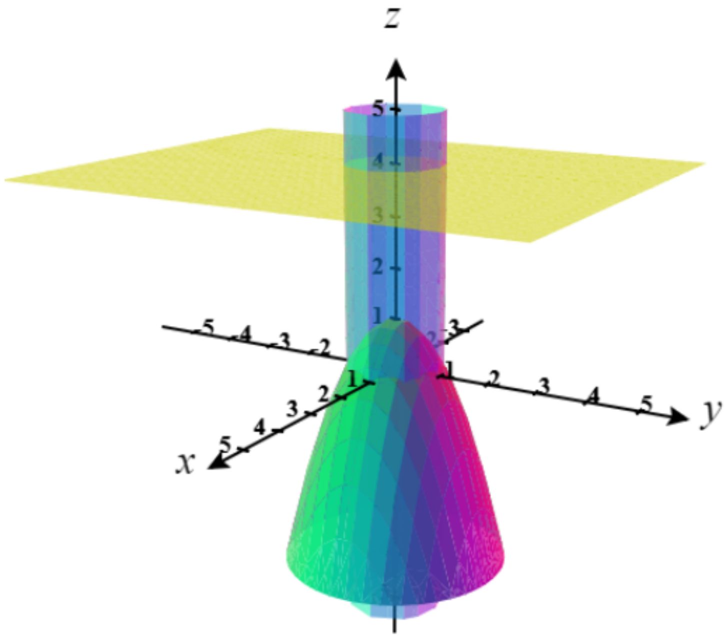
□

مثال ۲۴۴. جسم E داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و زیر صفحه‌ی $z = 4$ و بالای سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ واقع شده است. چگالی این جسم در هر نقطه رابطه‌ی خطی زیر را با فاصله‌ی آن نقطه تا محور مرکزی استوانه دارد.

$$f(x, y, z) = \underbrace{K}_{\text{ثابت}} r$$

جرم جسم را بیابید.

پاسخ.



$$\iiint_E Krdv = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\int_{۱-r^{۲}}^{۴}(Kr)rdzdrd\theta =$$

$$K\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} r^{۲}(۳+r^{۲})drd\theta = ۲\pi K\int_{۰}^{۱}(۳r^{۲}+r^{۴})dr = \frac{۱۲}{۵}\pi K$$

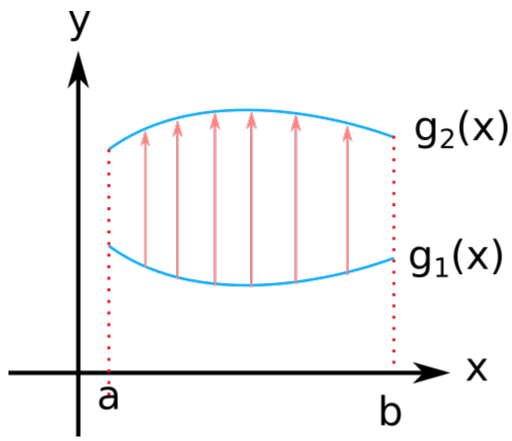
□

تمرینهای تمرین ۳۷، ۳۸ در صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.

۳۳ نیم جلسه‌ی سی و سوم، چهارشنبه، انتگرالگیری در مختصات کروی

پیش از آنکه درس درباره‌ی مختصات کروی را آغاز کنیم، نیاز به رفع یک ابهام است. برای محاسبه‌ی مساحت هم می‌توان از انتگرال یگانه و هم دوگانه استفاده کرد. برای محاسبه‌ی حجم نیز هم می‌توان از انتگرال دوگانه و هم از انتگرال سه‌گانه به صورتهای زیر استفاده کرد:

۱.۰.۳۳ مساحت ناحیه‌ی محصور



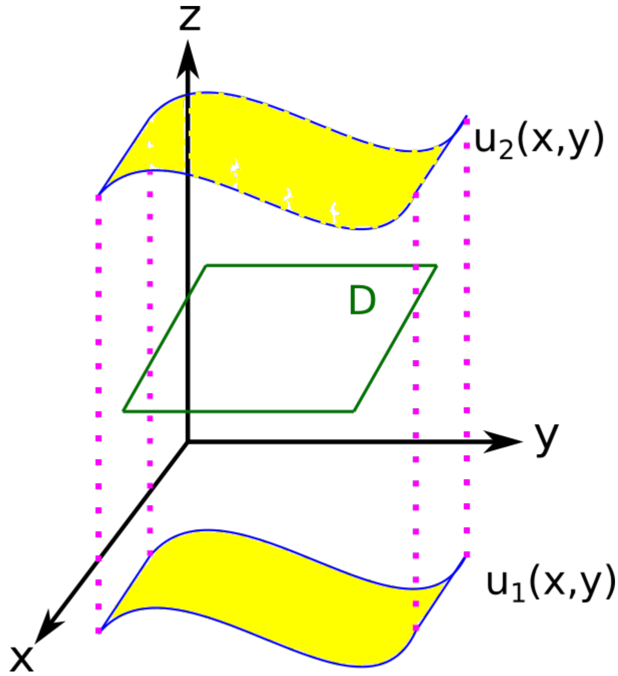
با استفاده از انتگرال یگانه:

$$\int_a^b \big|g_۲(x) - g_۱(x)\big| dx$$

با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_A dA = \int_a^b \int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} dA = \int_a^b \big(g_۲(x) - g_۱(x)\big) dx$$

۲.۰.۳۳ حجم ناحیه‌ی محصور



با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_D \big(u_۲(x,y) - u_۱(x,y)\big)dA$$

با استفاده از انتگرال سه‌گانه:

$$\iiint_E dv = \iint_D \left(\int_{u_۱(x,y)}^{u_۲(x,y)} dz\right)dA = \iint_D \big(u_۲(x,y) - u_۱(x,y)\big)dA$$

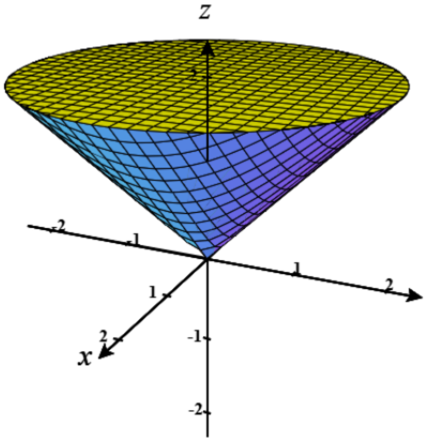
در جلسه‌ی قبل انتگرالگیری با استفاده از مختصات استوانه‌ای را بررسی کردیم:

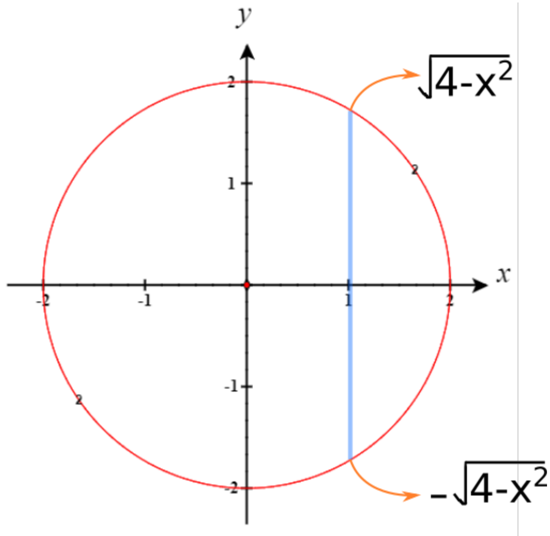
$$\iiint_E \Box dxdydz = \iiint_E \Box rdrd\theta dz$$

بگذارید این بحث را با مثالی به پایان ببریم:

مثال ۲۴۵.

$$\int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}}\int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۲}(x^۲+y^۲)dzdydx$$

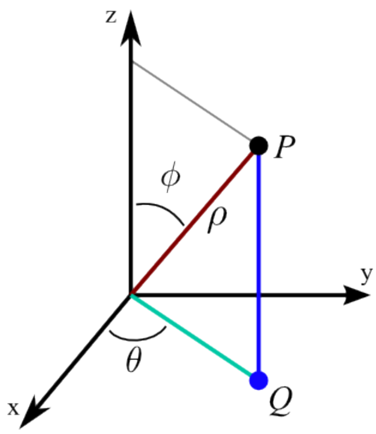




برای محاسبه‌ی انتگرال فوق کافی است انتگرال زیر را محاسبه کنیم. محاسبه‌ی آن را به عهده‌ی شما می‌گذاریم:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{2}(r^2)rdzdrd\theta=\dots$$

۱.۳۳ مختصات کُروی



فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مبدأ برابر است با ρ . مختصات نقطه‌ی (x,y,z) در دستگاه دکارتی را در دستگاه کروی به صورت (ρ,θ,ϕ) نشان می‌دهیم. با مختصات (ρ,θ,ϕ) که $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$، $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ و $\rho\geqslant 0$ می‌توان تمام هشت قسمت دستگاه مختصات سه بُعدی را پوشش داد.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\phi$$

$$x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z=\rho\cos\phi$$

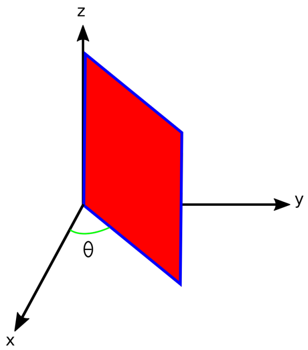
$$\rho=\sqrt{r^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

معادله‌ی کُره $x^2+y^2+z^2=c^2$ در دستگاه کُروی به صورت زیر است:

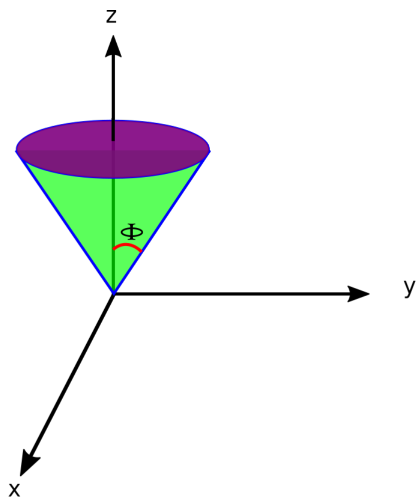
$$\rho=c$$

در زیر چند شکل با استفاده از دستگاه کروی کشیده شده‌اند.

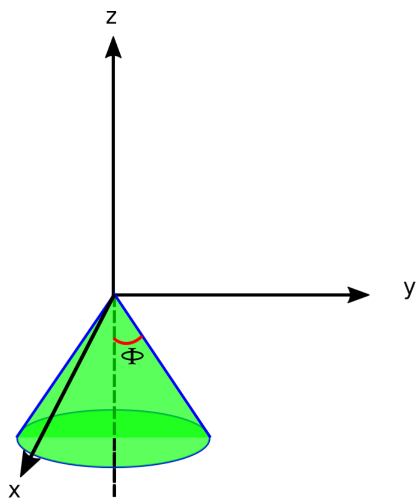
$$\theta = c$$



$$۰ < \phi < \frac{\pi}{۴}$$



$$\frac{۳\pi}{۴} < \phi < \pi$$

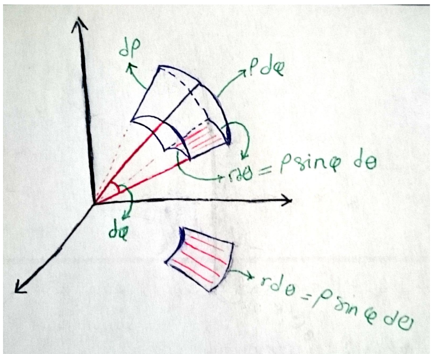


تغییرات متغیر لازم برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات کروی به صورت زیرند:

$$\iiint_E f(x,y,z)dv$$

$$dv = dxdydz = \rho^۲ \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \iiint_E f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$



مثال ۲۴۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iiint_B e^{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} dv$$

که در آن:

$$B = \{(x,y,z) | x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \leqslant ۱\}.$$

پاسخ.

$$۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$$

$$۰ \leqslant \rho \leqslant ۱$$

$$۰ \leqslant \phi \leqslant \pi$$

$$\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} e^{\rho^{۳}}\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

$$\int_{۰}^{۱} e^{\rho^{۳}}\rho^{۲}\sin\phi d\rho = \sin\phi \frac{e^{\rho^{۳}}}{۳}|_{۰}^{۱} = \frac{\sin\phi}{۳}(e-۱)$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\sin\phi}{۳}(e-۱)d\theta = \frac{۲\pi}{۳}\sin\phi(e-۱)$$

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{۲\pi}{۳}\sin\phi(e-۱)d\phi = \frac{۲\pi}{۳}(e-۱)(-\cos\phi)|_{۰}^{\pi}$$

توجه ۲۴۷. اگر حدود انتگرالها مشخص باشد و هر تابعی تنها به یک متغیر بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x)g(y)h(z)dzdydx = \int_r^s h(z)dz \times \int_c^d g(y)dy \times \int_a^b f(x)dx$$

تمرین ۷۱. تمرینهای ۳۸ تا ۴۱ صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.

۲.۳۳ ادامه‌ی مختصات کُروی

مثال ۲۴۸. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و زیر کُره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = z$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = z \Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ - z = ۰$$

یادآوری ۲۴۹.

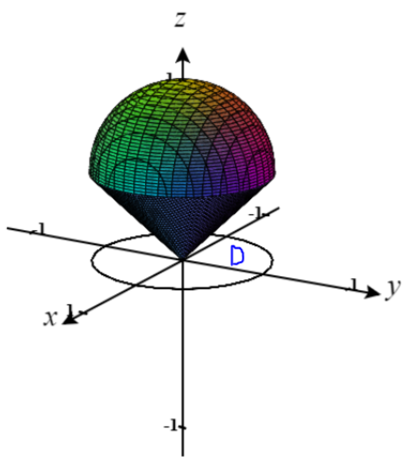
$$z^۲ + az = (z + \frac{a}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$x^۲ + y^۲ + (z - \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

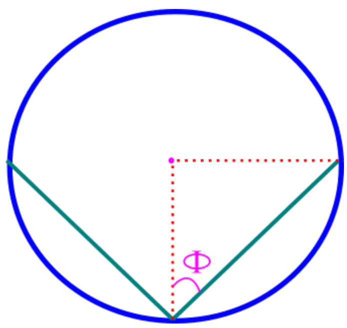
حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + y^۲} \leqslant z \leqslant \text{کُره} \\ (x, y) \in D \ \text{ناحیه‌ی} \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{۴}$$



معادله‌ی کره را در مختصات کروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = z \Rightarrow \rho^۲ = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

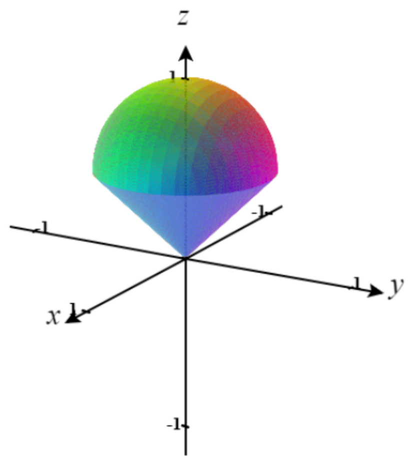
انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho=\sin\phi\frac{\rho^{۳}}{۳}|_{۰}^{\cos\phi}=\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}d\phi=\frac{-\cos^{۴}\phi}{۴\times ۳}|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۱}{۱۲}+۱$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}(-\frac{۱}{۱۲}+۱)d\theta=۲\pi(-\frac{۱}{۱۲}+۱)$$



□

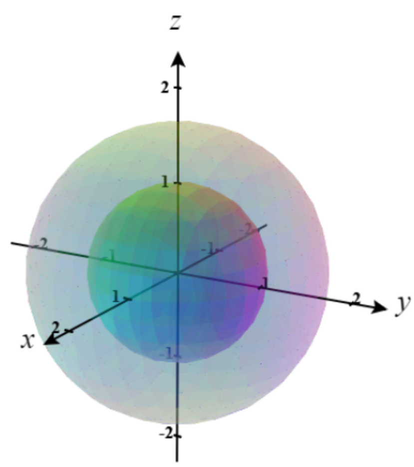
تمرین ۷۲. سعی کنید مثال بالا را در دستگاه‌های استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۵۰. انتگرال $\iiint_T\frac{۱}{\sqrt{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۳}}}dv$ را محاسبه کنید که در آن که ناحیه‌ی بین دو کُره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=e$ است.

$$۰\leqslant\theta\leqslant ۲\pi$$

$$۰\leqslant\phi\leqslant\pi$$

$$۱\leqslant\rho\leqslant\sqrt{e}$$



تمرین ۷۳. حجم ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=z$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ را بیابید.

۳.۳۳ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی

توابع فصل قبل، توابعی مانند $f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۷۴. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌هائي را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرالهای بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدانهای برداری شروع می‌کنیم.

۴.۳۳ میدان‌های برداری

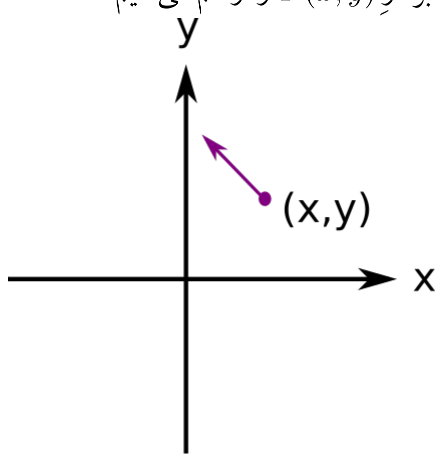
منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^۲$ تابعی است از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$:

$$F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x,y) = \Big(h(x,y), k(x,y)\Big)$$

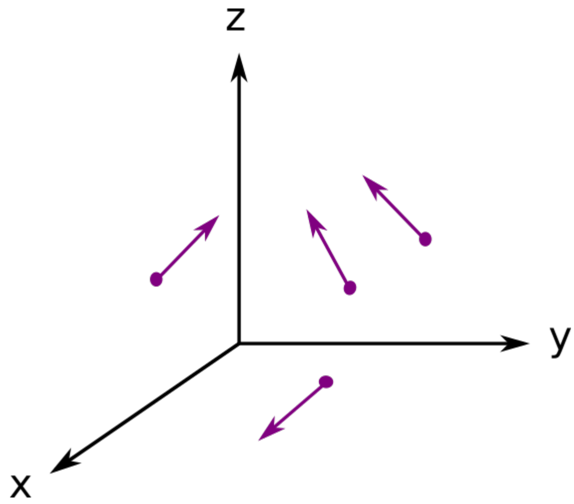
معمولاً دامنه و بردِ این توابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین‌صورت که با شروع از هر نقطه‌ی (x,y) بردارِ $F(x,y)$ را رسم می‌کنیم.



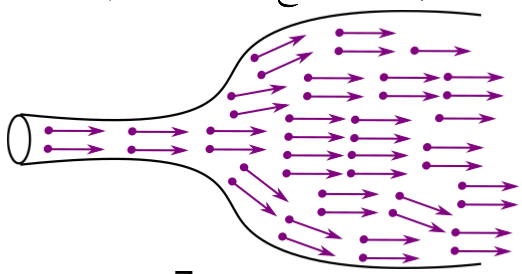
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^۳$ تابعی است مانند تابع زیر:

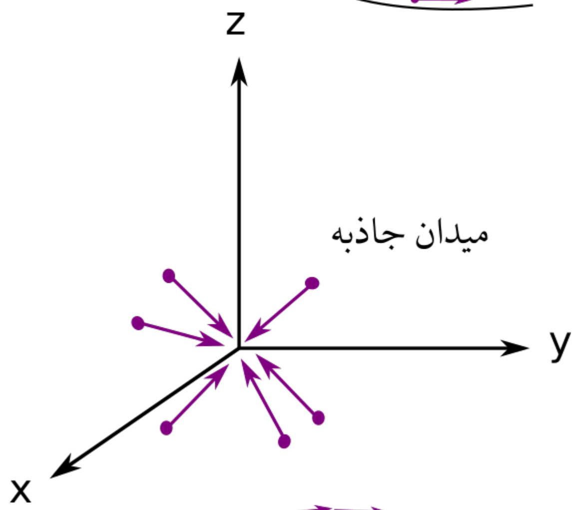
$$F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

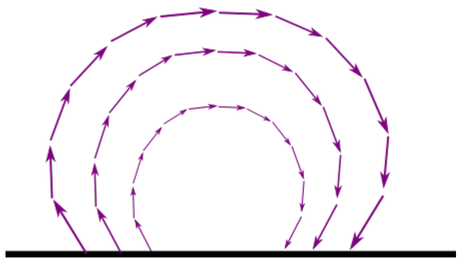
$$(x,y,z) \mapsto \Big(h(x,y,z), k(x,y,z), l(x,y,z)\Big)$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:







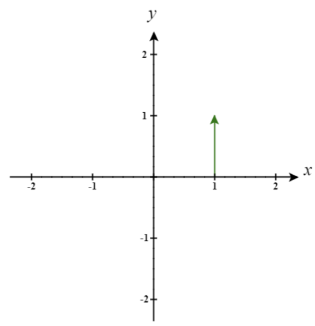
میدان مغناطیسی

مثال ۲۵۱. تابع برداری $F(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ را رسم کنید.

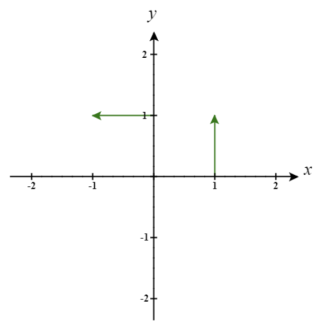
پاسخ.

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

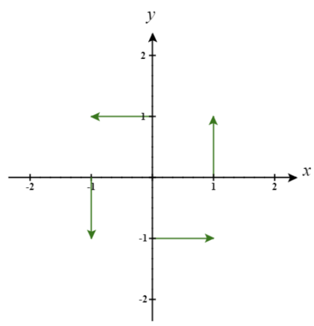
$$(۱,۰) \to (۰,۱)$$



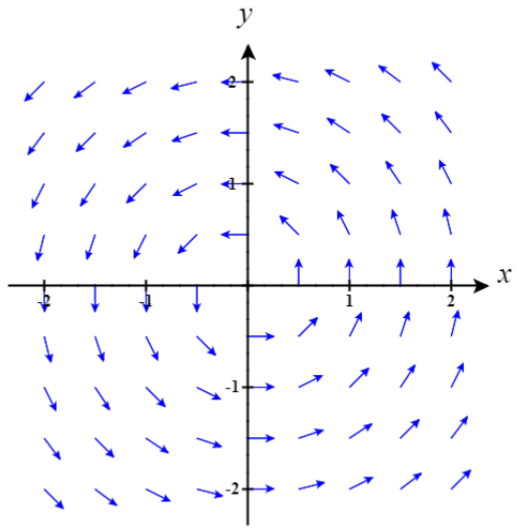
$$(۰,۱) \to (-۱,۰)$$



$$(-۱,۰) \to (۰,-۱) \quad \text{و} \quad (۰,-۱) \to (۱,۰)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می‌شود.



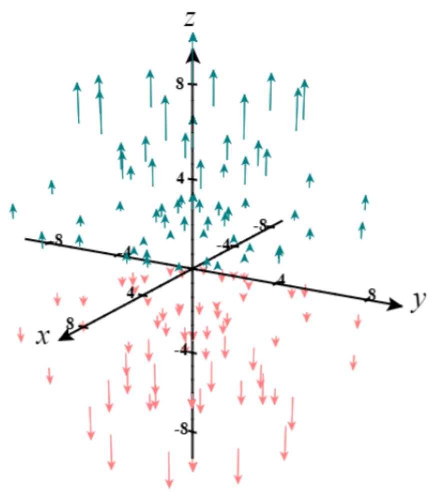
به طور دقیقتر اگر $\overrightarrow{r}(x,y)$ بردار مکان نقطه‌ی (x,y) باشد، آنگاه

$$(x,y)\cdot(-y,x)=-xy+xy=۰\Rightarrow \overrightarrow{r}(x,y)\perp\overrightarrow{F}(x,y)$$

یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوایر ایجاد می‌شود. □

مثال ۲۵۲. میدان برداری $F(x,y,z)=z\overrightarrow{k}$ را رسم کنید.

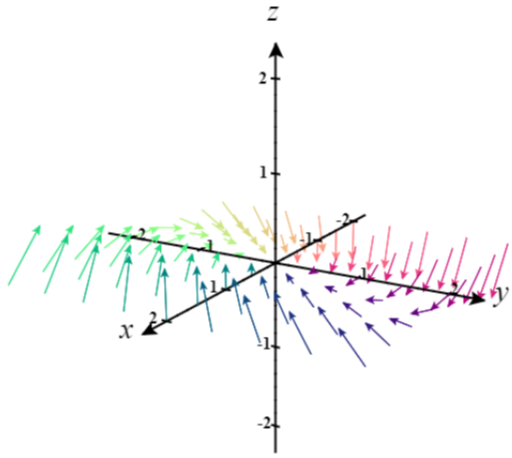
پاسخ.



□

مثال ۲۵۳. میدان برداری $F(x,y,z)=y\overrightarrow{i}-z\overrightarrow{j}+x\overrightarrow{k}$ را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.



$\square$

مثال ۲۵۴. اگر $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$(x,y) \mapsto \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big)$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر $f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

$$(x,y,z) \mapsto \Big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\Big)$$

یک میدان برداری است.

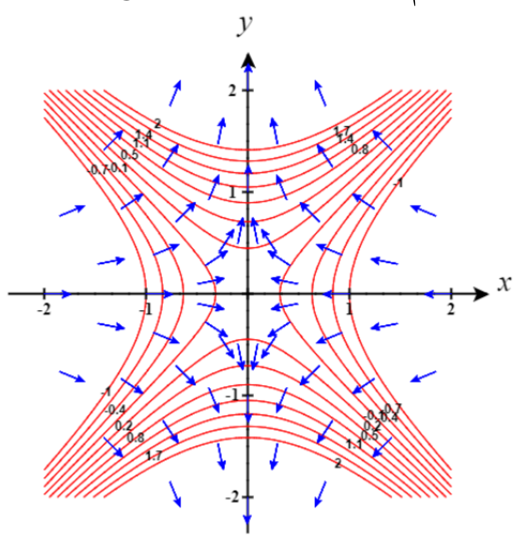
مثال ۲۵۵. فرض کنید $f(x,y) = y^۲ - x^۲$. میدان برداری ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$(x,y) \mapsto (-۲x, ۲y)$$

قبلا گفته‌ایم که میدان گرادیان بر منحنی‌های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



□

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

تعریف ۲۵۶. فرض کنید F یک میدان برداری دلخواه روی $\mathbf{R}^3$ باشد. میدان F را **پایستار** می‌خوانیم هرگاه تابع $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 & & \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \end{array}$$

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درسهای آینده روشهایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که **انتگرالهای میدانهای پایستار، از مسیر مستقلند.**
بحث میدانهای برداری را فعلاً رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

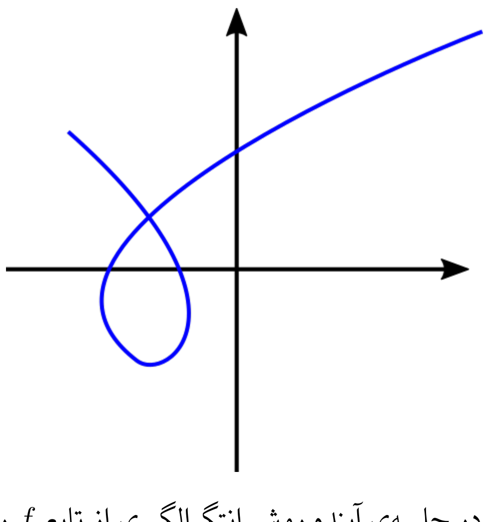
۵.۳۳ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی عددی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}$ باشد.

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

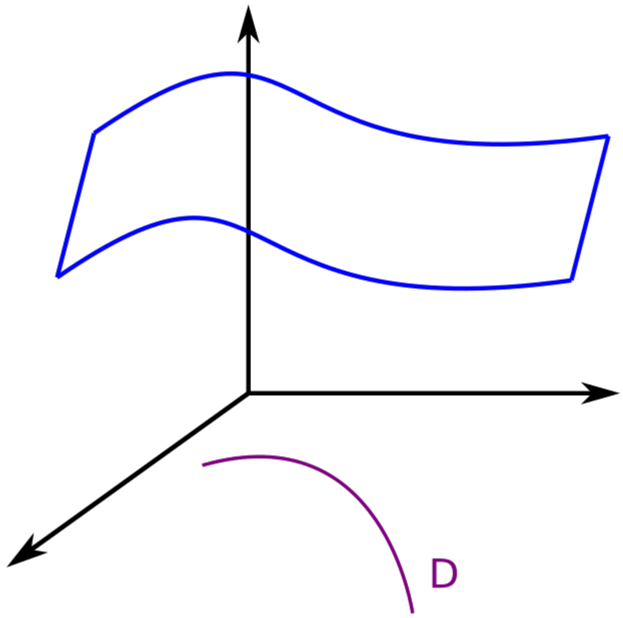
فرض کنید $C : \overrightarrow{r}(t)$ یک خم هموار در $\mathbf{R}^2$ باشد. منظور از هموار این است که $\overrightarrow{r}'(t)$ پیوسته باشد و $|\overrightarrow{r}'(t)| \neq 0 \quad \forall t$.
صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی هیچ توقفی طی می‌شود.

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$



در جلسه‌ی آینده روش انتگرالگیری از تابع f روی مسیر خم C را فراخواهیم گرفت و با انتگرال زیر آشنا خواهیم شد:

$$\int_c f(x,y)ds$$


D

۳۴ جلسه‌ی سی و چهارم

۱.۳۴ ادامه‌ی مختصات کُروی

مثال ۲۵۷. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ و زیر کُره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = z$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = z \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - z = ۰$$

یادآوری ۲۵۸.

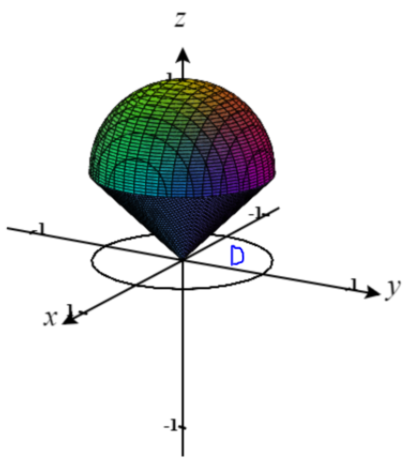
$$z^{۲} + az = (z + \frac{a}{۲})^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴}$$

$$x^{۲} + y^{۲} + (z - \frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

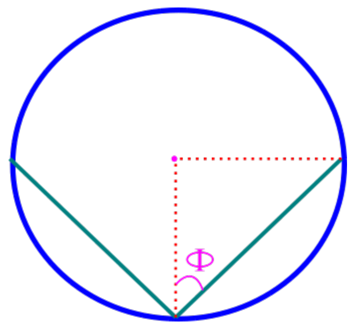
حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \leqslant z \leqslant \text{کُره} \\ (x, y) \in D \ \text{ناحیه‌ی} \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{۴}$$



معادله‌ی کره را در مختصات کروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = z \Rightarrow \rho^{۲} = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

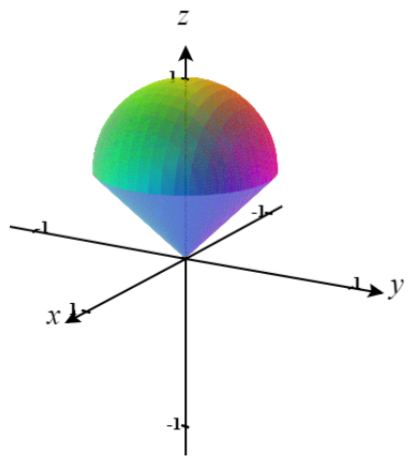
انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_{۰}^{\cos\phi}\rho^{۲}\sin\phi d\rho=\sin\phi\frac{\rho^{۳}}{۳}|_{۰}^{\cos\phi}=\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\phi\cos^{۳}\phi}{۳}d\phi=\frac{-\cos^{۴}\phi}{۴\times۳}|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۱}{۱۲}(\frac{۱}{۴}-۱)=\frac{۱}{۱۶}.$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{۱}{۱۶})d\theta=\frac{\pi}{۸}.$$



□

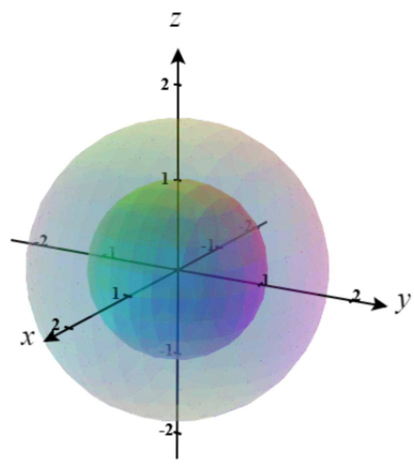
تمرین ۷۵. سعی کنید مثال بالا را در دستگاه‌های استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۵۹. انتگرال $\iiint_T\frac{۱}{\sqrt{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۳}}}dv$ را محاسبه کنید که در آن T ناحیه‌ی بین دو کُره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=e$ است.

$$۰\leqslant\theta\leqslant۲\pi$$

$$۰\leqslant\phi\leqslant\pi$$

$$۱\leqslant\rho\leqslant\sqrt{e}$$



تمرین ۷۶. حجم ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=z$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ را بیابید.

۲.۳۴ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی

توابع فصل قبل، توابعی مانند $f : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۷۷. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌هائي را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرالهای بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدانهای برداری شروع می‌کنیم.

۳.۳۴ میدان‌های برداری

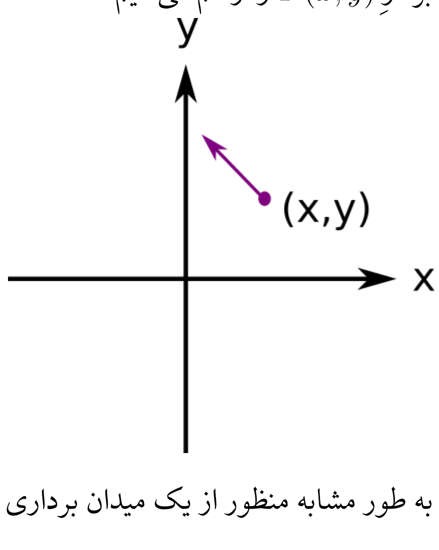
منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^۲$ تابعی است از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$:

$$F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x,y) = \Big(h(x,y), k(x,y)\Big)$$

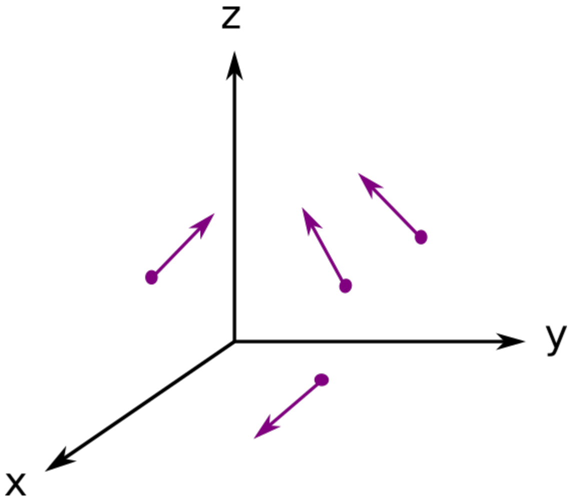
معمولاً دامنه و بردِ این توابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین‌صورت که با شروع از هر نقطه‌ی (x,y) بردارِ $F(x,y)$ را رسم می‌کنیم.



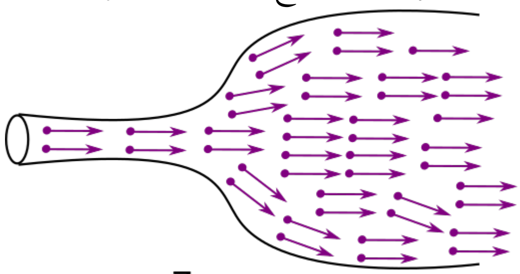
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^۳$ تابعی است مانند تابع زیر:

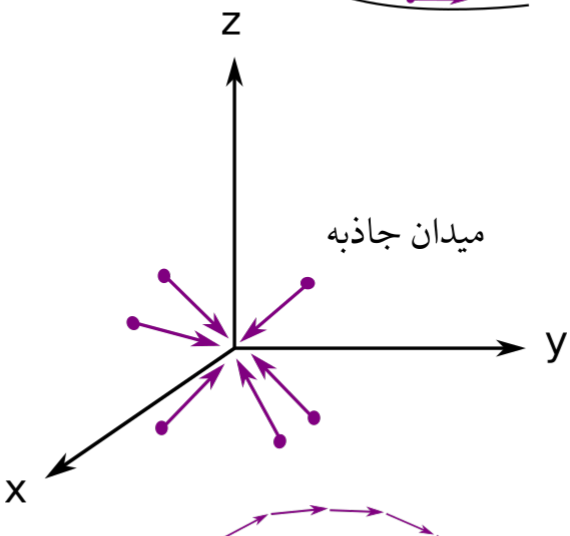
$$F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

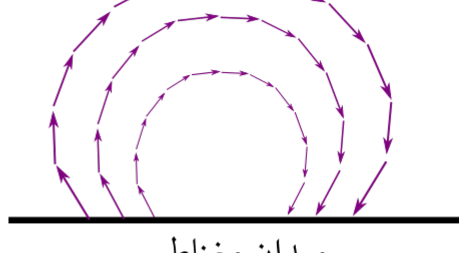
$$(x,y,z) \mapsto \Big(h(x,y,z), k(x,y,z), l(x,y,z)\Big)$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:







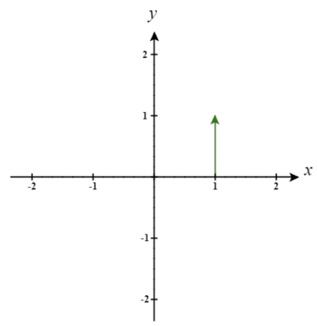
میدان مغناطیسی

مثال ۲۶۰. تابع برداری $F(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ را رسم کنید.

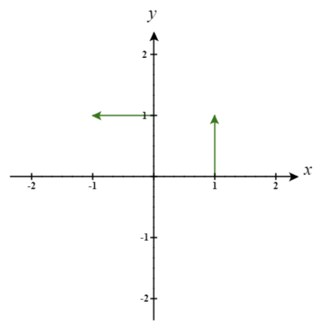
پاسخ.

$$F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

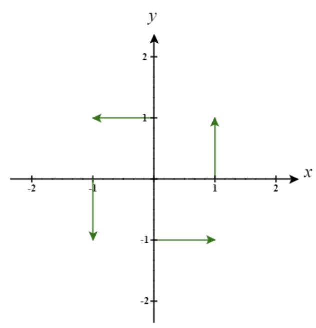
$$(۱,۰) \to (۰,۱)$$



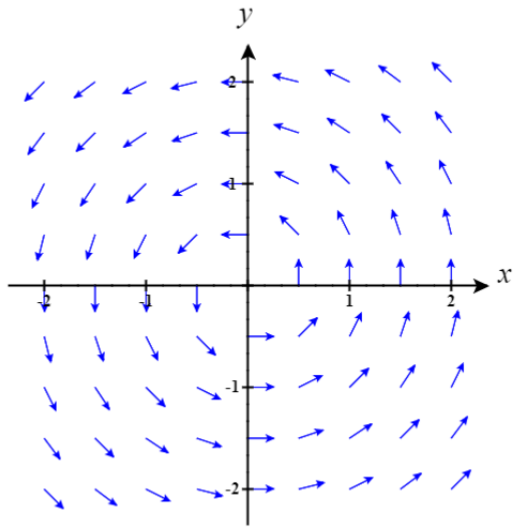
$$(۰,۱) \to (-۱,۰)$$



$$(-۱,۰) \to (۰,-۱) \quad \text{و} \quad (۰,-۱) \to (۱,۰)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می‌شود.



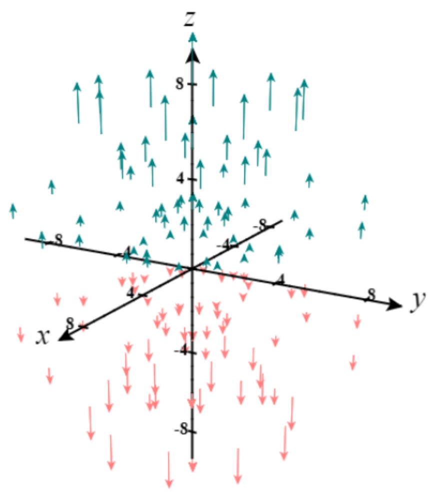
به طور دقیقتر اگر $\overrightarrow{r}(x,y)$ بردار مکان نقطه‌ی (x,y) باشد، آنگاه

$$(x,y)\cdot(-y,x) = -xy + xy = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{r}(x,y) \perp \overrightarrow{F}(x,y)$$

یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوایر ایجاد می‌شود. □

مثال ۲۶۱. میدان برداری $F(x,y,z) = z\overrightarrow{k}$ را رسم کنید.

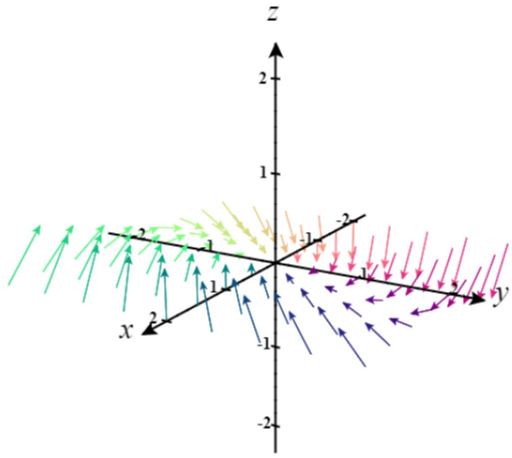
پاسخ.



□

مثال ۲۶۲. میدان برداری $F(x,y,z) = y\overrightarrow{i} - z\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.



$\square$

مثال ۲۶۳. اگر $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \Big(f_x(x, y), f_y(x, y)\Big)$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \Big(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\Big)$$

یک میدان برداری است.

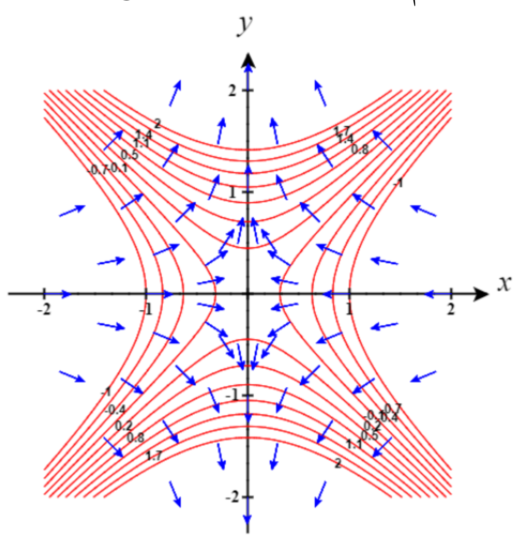
مثال ۲۶۴. فرض کنید $f(x, y) = y^2 - x^2$. میدان برداری ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-2x, 2y)$$

قبلا گفته‌ایم که مبدان گرادیان بر منحنی‌های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



$\square$

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

تعریف ۲۶۵. فرض کنید F یک میدان برداری دلخواه روی $\mathbf{R}^3$ باشد. میدان F را **پایستار** می‌خوانیم هرگاه تابع $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 & & \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \end{array}$$

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درسهای آینده روشهایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که **انتگرالهای میدانهای پایستار، از مسیر مستقلند.**
بحث میدانهای برداری را فعلاً رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

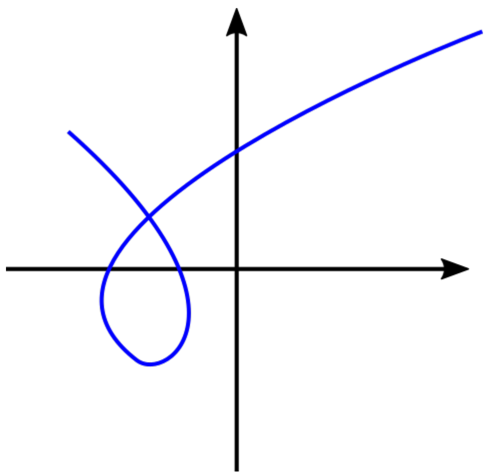
۴.۳۴ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی عددی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}$ باشد.

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

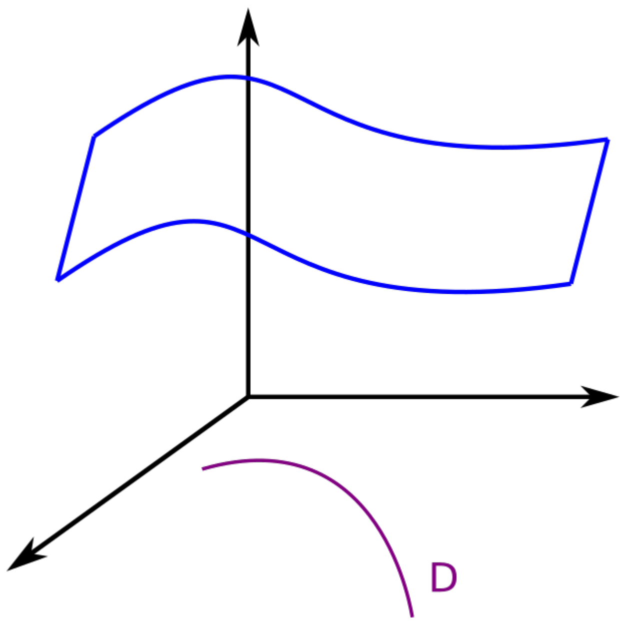
فرض کنید $C : \overrightarrow{r}(t)$ یک خم هموار در $\mathbf{R}^2$ باشد. منظور از هموار این است که $\overrightarrow{r}'(t)$ پیوسته باشد و $\forall t \quad |\overrightarrow{r}'(t)| \neq 0$.
صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی هیچ توقفی طی می‌شود.

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$



در جلسه‌ی آینده روش انتگرالگیری از تابع f روی مسیر خم C را فراخواهیم گرفت و با انتگرال زیر آشنا خواهیم شد:

$$\int_c f(x,y)ds$$


D

۳۵ جلسه‌ی سی‌وپنجم

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی میدانهای برداری (مانند توابع زیر) صحبت کنیم.

$$F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$$

$$G : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

گفتیم که یک میدان برداری $F : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$ را پایستار می‌خوانیم هرگاه تابع عددی $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ موجود باشد که

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

در درسهای آینده محکی معرفی خواهیم کرد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم پایستار بودن یک میدان برداری را تشخیص دهیم. پیش از آن نیاز به مقدماتی داریم. فعلاً بحث توابع برداری را رها می‌کنیم و به توابع عددی می‌پردازیم.

۱.۳۵ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

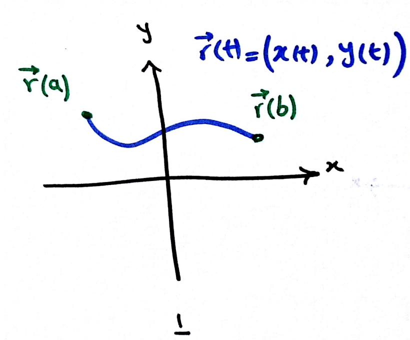
فرض کنید c یک خم هموار در $\mathbf{R}^۲$ باشد که با معادله‌ی برداری

$$\overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

داده شده باشد. فرض می‌کنیم که

$$\forall t \in [a, b] \quad r'(t) \neq ۰$$

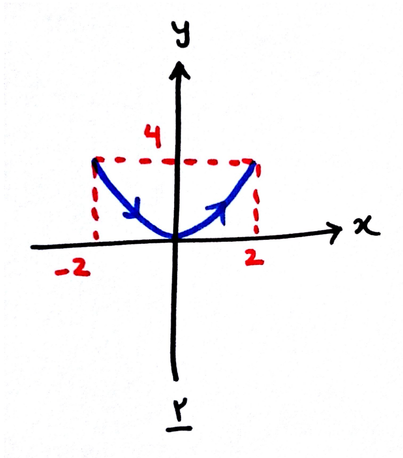
و $\overrightarrow{r}'(t)$ پیوسته باشد.



مثال ۲۶۶. منحنی $y = x^۲$ را به صورت یک خم نمایش دهید. $(-۲ \leqslant x \leqslant ۲)$.

پاسخ.

$$\overrightarrow{r}(t) = (t, t^۲) \quad -۲ \leqslant t \leqslant ۲$$

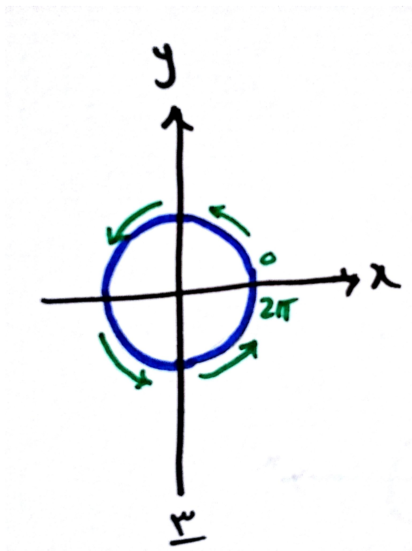


□

مثال ۲۶۷. خمِ $\overrightarrow{r}(t)=(\cos t,\sin t) \quad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$ را رسم کنید.

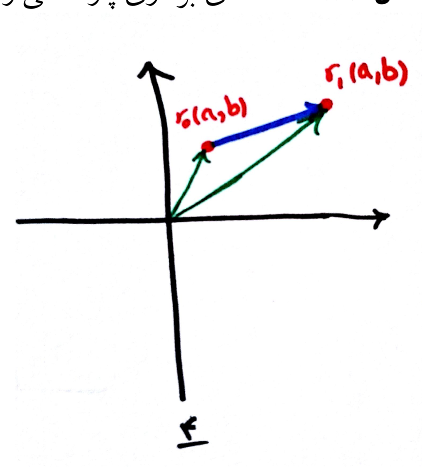
پاسخ.

$$x^۲+y^۲=\cos^t+\sin^۲ t=۱$$



□

مثال ۲۶۸. معادله‌ی برداری پاره‌خطی را بنویسید که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل کند.



فرض کنید نقطه‌ی A دارای بردار مکانِ $r_۰$ و نقطه‌ی B دارای بردار مکان $r_۱$ باشد.

$$\overrightarrow{r}(t)=\overrightarrow{r}_۰+(\overrightarrow{r}_۱-\overrightarrow{r}_۰)t \quad ۰\leqslant t\leqslant ۱$$

به بیان دیگر:

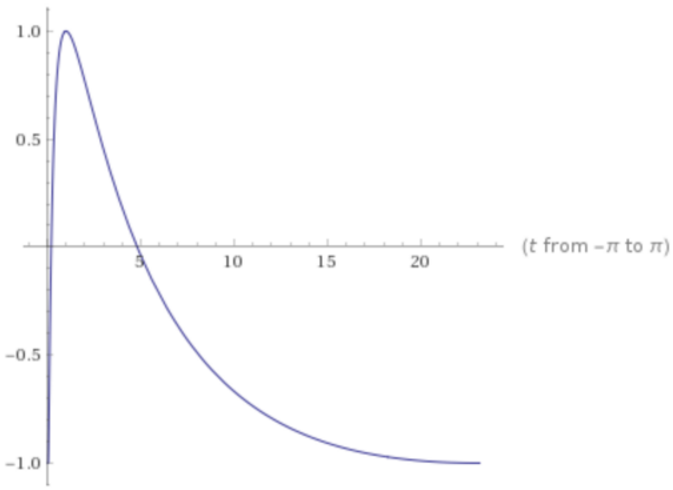
$$\overrightarrow{r}(t) = t\overrightarrow{r}_{۱} + (۱-t)\overrightarrow{r}_{۰} \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱$$

مثال ۲۶۹. خم‌های زیر را (با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای) رسم کنید.

۱. $(\cos t, ۲\sin t)$

۲. $(e^t, \cos t)$

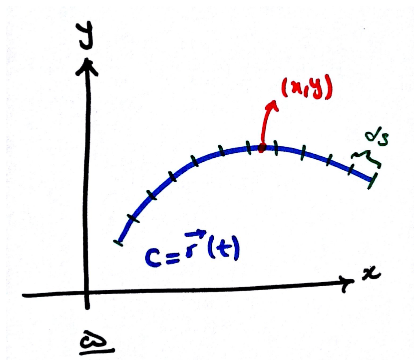
در زیر دومی را به عنوان نمونه رسم کرده‌ایم:



فرض کنید $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد.

هدف ۲۷۰. تعریفِ

$$\int_c f ds$$



خم مورد نظر را به قطعاتی به طول Δs تقسیم می‌کنیم و از هر قطعه یک نقطه انتخاب می‌کنیم و حد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{\Delta s \to ۰} \sum f(x,y)\Delta s$$

اگر حد بالا موجود باشد می‌نویسیم:

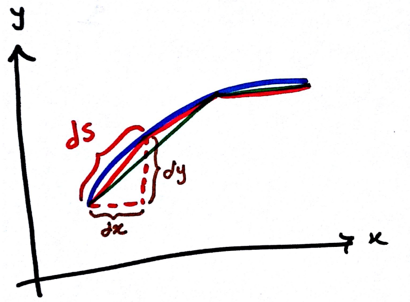
$$\int_c f(x,y)ds = \lim_{\Delta s \to ۰} \sum f(x,y)\Delta s$$

توجه ۲۷۱. طول خم برابر است با

$$\int_c ds$$

محاسبه‌ی ds

اندازه‌ی ds را وقتی تعداد قطعات زیاد باشند، می‌توان با طول پاره‌خطی که دو سرِ ds را به هم وصل می‌کند تخمین زد.



۶

پس:

$$ds = \sqrt{(dx)^{۲} + (dy)^{۲}}$$

منحنی مورد نظر ما توسط معادله‌ی برداری $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ داده شده است. پس

$$dx = x'(t)dt \quad dy = y'(t)dt$$

پس داریم:

$$ds = |\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

که در آن

$$\overrightarrow{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

و

$$|\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^{۲} + \big(y'(t)\big)^{۲}}$$

حال می‌توانیم همه چیز را در یک تعریف خلاصه کنیم:

تعریف ۲۷۲. فرض کنید خمِ c توسط معادله‌ی برداری $a \leqslant t \leqslant b \quad \overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ داده شده باشد و $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$ تابعی عددی باشد. داریم

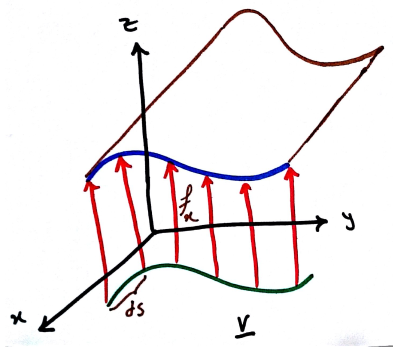
$$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

توجه ۲۷۳. طول خم به معادله‌ی $a \leqslant t \leqslant b \quad \overrightarrow{r}(t)$ برابر است با

$$\int_c ds = \int_a^b |\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

دقت کنید که دامنه‌ی یک تابعِ $f : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}^{۲}$ می‌تواند تمامِ $\mathbf{R}^{۲}$ باشد ولی در انتگرالگیری خطی ما به مقادیر تابع روی یک منحنی که در دامنه‌ی تابع واقع شده است توجه داریم.

توجیه هندسی.



توجه ۲۷۴. یک خم مشخص را شاید بتوان به گونه‌های مختلفی پارامتر بندی کرد. برای مثال یک دایره را در زیر به دو صورت پارامتربندی کرده‌ایم.

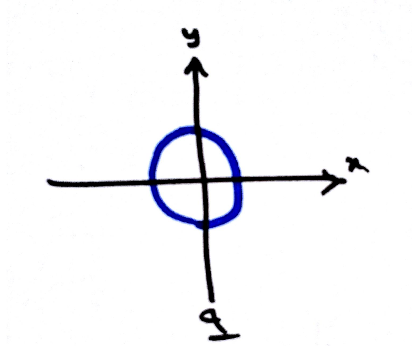
$$c:\ \overrightarrow{r}(t)=(\cos t,\sin t)\qquad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

$$c:\ \overrightarrow{h}(t)=(\cos ۲t,\sin ۲t)\qquad ۰\leqslant t\leqslant \pi$$

حاصل انتگرال از یک تابع عددی به نوع پارامتر بندی خم بستگی ندارد:

$$\int_c f(x,y)ds=\int_۰^{۲\pi} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\int_۰^{\pi} f\big(\overrightarrow{h}(t)\big)|\overrightarrow{h}'(t)|dt$$

دقت کنید که فرق دو پارامتربندی بالا این است که در دومی خم سریعتر پیموده می‌شود.



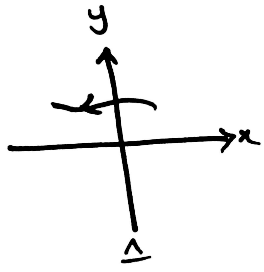
توجه ۲۷۵. طول خم نیز مستقل از نوع پارامتربندی آن است.

توجه ۲۷۶. انتگرال یک تابع عددی روی یک خم به جهت خم بستگی ندارد:

$$c:\ \overrightarrow{r}(t)$$

$$-c:\ \overrightarrow{h}(t)$$

$$\int_c f(x,y)ds=\int_{-c} f(x,y)ds$$



تعمیم ۲۷۷ (سه بُعدی). فرض کنید $f:\mathbf{R}^{۳}\to\mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد و c یک خم هموار با معادله‌ی برداری

$$\overrightarrow{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad a\leqslant t\leqslant b$$

باشد آنگاه

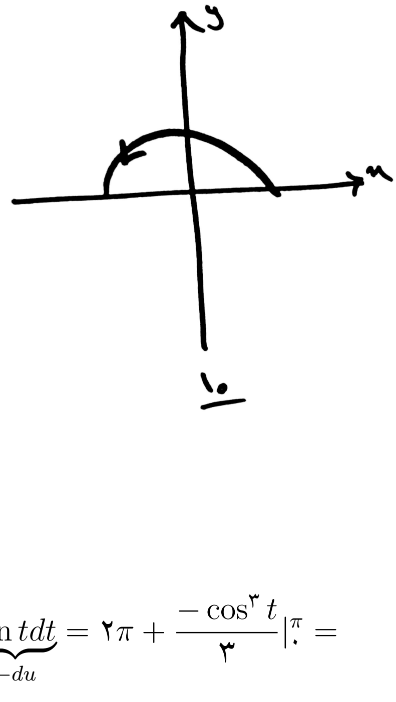
$$\int_c f(x,y)ds=\int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\int_a^b f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$ds=|\overrightarrow{r}'(t)|dt=\sqrt{\big(x'(t)\big)^{۲}+\big(y'(t)\big)^{۲}+\big(z'(t)\big)^{۲}}dt$$

مثال ۲۷۸. $\int_c(۲+x^{۲}y)ds$ را محاسبه کنید که در آن c نیمه‌ی بالائی دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ است.

پاسخ.

$$c:\overrightarrow{r}(t)=\big(\cos t,\sin t\big)\quad ۰\leqslant t\leqslant\pi$$



$$\overrightarrow{r}'(t)=\big(-\sin t,\cos t\big)$$

$$|\overrightarrow{r}'(t)|=\sqrt{\sin^{۲}t+\cos^{۲}t}=۱$$

$$\int_c f(x,y)ds=\int_۰^\pi(۲+\cos^{۲}t\sin t)\times ۱dt=۲\pi+\int_۰^\pi\underbrace{\cos^{۲}t}_{u}\underbrace{\sin tdt}_{-du}=۲\pi+\frac{-\cos^{۳}t}{۳}|_۰^\pi=$$

$$۲\pi-(-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳})=۲\pi+\frac{۲}{۳}$$

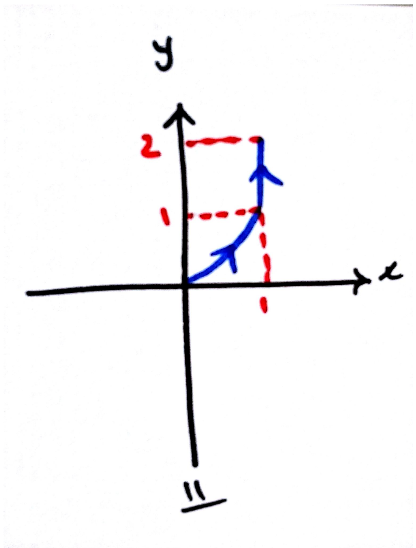
□

تمرین ۷۸. $\int_c ۲xds$ را حساب کنید که در آن $c=c_۱\cup c_۲$ و $c_۱$ سهمی $y=x^{۲}$ از نقطه‌ی $(۰,۰)$ تا نقطه‌ی $(۱,۱)$ است و $c_۲$ خطی عمودی از $(۱,۱)$ تا $(۱,۲)$ است.

پاسخ.

$$c_1 : \overrightarrow{r}_1(t) = (t, t^2) \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$c_2 : \overrightarrow{r}_2(t) = (1, t) \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$$



$$\overrightarrow{r}'_1(t) = (1, 2t) \Rightarrow |\overrightarrow{r}'_1(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\overrightarrow{r}'_2(t) = (0, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{r}'_2(t)| = \sqrt{0 + 1} = 1$$

توجه ۲۷۹. اگر c اجتماعی از خم‌های هموار $c_1, \ldots, c_n$ باشد آنگاه

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{c_1} f(x,y)ds + \ldots + \int_{c_2} f(x,y)ds$$

$$\int_{c_1} 2x ds = \int_0^1 2t(\sqrt{1 + 4t^2})dt$$

$$u = 1 + 4t^2 \Rightarrow du = 8tdt \Rightarrow \frac{du}{8} = tdt$$

$$\int_0^1 2t(\sqrt{1 + 4t^2})dt = 2\int_1^5 \sqrt{u}\frac{du}{8} = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_1^5 = \ldots$$

$$\int_{c_2} 2x ds = \int_1^2 dt = 2 - 1 = 1$$

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{c_1} f(x,y)ds + \int_{c_2} f(x,y)ds$$

□

۱.۱.۳۵ چند انتگرال دیگر وابسته به خم

تا اینجا با انتگرال‌گیری یک تابع عددی روی یک خم آشنا شدیم. دقت کنید که مقادیر تابع روی خم محاسبه می‌شدند و ds در پایان انتگرال نوشته می‌شد. در زیر چند نوع انتگرال دیگر را معرفی کرده‌ایم.

تعریف ۲۸۰. برای محاسبه‌ی

$$\int_c f(x,y)dx$$

روی خم

$$c: \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

که درآن

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_c f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

به طور مشابه

$$\int_c f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)y'(t)dt$$

برای توابع $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ هم مطالب فوق را می‌توان تعمیم داد.

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t)dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t)dt$$

$$\int_c f(x,y,z)dz = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)dt$$

خلاصه: در درس امروز با انتگرالهای $\int_c fds, \int_c fdx, \int_c fdy$ آشنا شدیم. دقت کنید که

$$\int_c fds = \int_{-c} fds$$

ولی

$$\int_c fdx = -\int_{-c} fdx$$

و

$$\int_c fdy = -\int_{-c} fdy$$

همچنین دیدیم که اگر منحنیِ c دارای یک معادله‌ی پارامتریِ $r(t)$ باشد انتگرالهای بالا را چگونه می‌توان محاسبه کرد.

۳۶ نیم جلسه‌ی سی و ششم، چهارشنبه

تمرین ۷۹. $\int_c y^{۲}dx + xdy$ را محاسبه کنید که در آن c اجتماع پاره خط از $(-۳, -۵)$ تا $(۰, ۲)$ و سهمی $x = ۴ - y^{۲}$ از $(-۳, -۵)$ تا $(۰, ۲)$ است.

توجه ۲۸۱. انتگرال یک **تابع عددی** روی یک خم، به جهت خم بستگی **ندارد**:

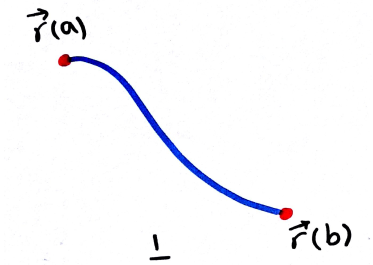
$$\int_c f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)ds = \int_{-c} f\big(\overrightarrow{r}(t)\big)ds$$

یعنی انتگرال بالا از جهت منحنی مستقل است. اما انتگرال زیر از جهت منحنی مستقل **نیست**.

$$\int_c f dx = -\int_{-c} f dx$$

همین گفته برای انتگرالهای ختم شونده به dy و dz هم برقرار است.

علت این است که در انتگرال اول مقادیر تابع در ds ضرب می‌شوند که همواره مثبت است، اما در دومی، dx به جهت بستگی دارد. به بیان دقیقتر:



$$c : \overrightarrow{r}(t) : a \leqslant t \leqslant b$$

$$f(x, y) : \mathbf{R}^{۲} \to \mathbf{R}$$

$$\int_c f ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_{-c} f ds = \int_b^a f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)|\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

$$\int_c f\big(x, y\big)dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

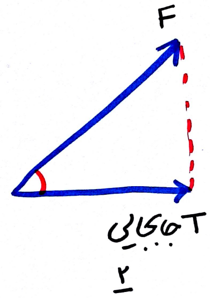
$$\int_{-c} f\big(x, y\big)dx = \int_b^a f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt = -\int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt$$

پس با **انتگرالگیری از توابع عددی روی خم** آشنا شدیم. در ادامه با نحوه‌ی انتگرالگیری از **توابع برداری روی خمها** آشنا می‌شویم:

۱.۳۶ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری

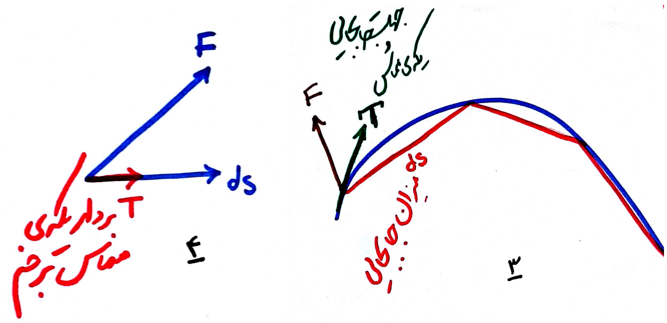
فرض کنید F یک بردار نیرو باشد و T بردار جابجایی باشد. می‌دانیم که کار برابر است با حاصل ضرب نیروی در جهت حرکت در میزان جابجائی.

$$\text{کار} \quad w = |F|\cos\theta|T| = F\cdot T$$



حال فرض کنید که میدان نیروی F جسمی را روی منحنی c جابجا کند. هدفمان محاسبه‌ی کار انجام شده، طی این جابجائی است.

$$c:\overrightarrow{r}(t) \quad a\leqslant t\leqslant b$$



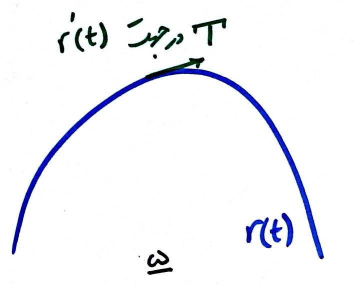
هدف ۲۸۲. محاسبه‌ی کار انجام شده.

منحنی مورد نظر را با طولهای ds تقسیم بندی می‌کنیم و فرض می‌کنیم که میزان جابجائی در هر قطعه برابر باشد با ds ولی جهت جابجائی برابر باشد با T، که منظور از T **بردارِ یکه‌ی** مماس بر منحنی است. برای محاسبه‌ی کل کار انجام شده باید تمام این کارهای کوچک را با هم جمع بزنیم:

$$\text{کار انجام شده توسط میدان } F \text{ در مسیر منحنی } c = \int_c (F\cdot \underbrace{T}_{\text{بردار یکه‌ی مماس}})ds$$

حال بیائید فرمول بالا را بر حسب پارامتربندی منحنی بازنویسی کنیم؛ نخست توجه کنید که

$$\text{بردار یکه‌ی مماس}\, T = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}$$



همچنین:

$$ds = |\overrightarrow{r}'(t)|dt$$

پس:

$$\int_c (F \cdot T) ds = \int_a^b \frac{F \cdot \overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|} |\overrightarrow{r}'(t)| dt = \int_a^b F \cdot \overrightarrow{r}'(t) dt = \int_a^b F \cdot dr$$

به علامت ضرب داخلی در انتگرال بالا توجه کنید.

فرمول بالا را می‌توان به صورت گسترده‌ی زیر نیز نوشت: فرض کنید $F = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$ آنگاه

$$\int_a^b F \cdot dr = \int_c P \underbrace{dx}_{x'(t)dt} + Q \underbrace{dy}_{y'(t)dt}$$

در تمرین ابتدای همین جلسه، نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال سمت راست بالا را دیده‌اید.

خلاصه ۲۸۳.

$$\text{میدان برداری} F = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big)$$

$$\text{خم} c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\int_c F \cdot T ds = \int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

مثال ۲۸۴. کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x,y) = x^{۲}\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j}$$

که ذره‌ای را روی دایره‌ی

$$(\cos t, \sin t) \quad ۰ \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

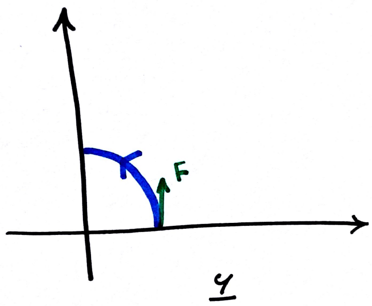
جابجا می‌کند، بیابید.

پاسخ.

$$P(x,y) = x^{۲}$$

$$Q(x,y) = -xy$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$$



۶

$$dx = x'(t)dt = -\sin t dt$$

$$dy = y'(t)dt = \cos t dt$$

$$\int_c P dx = \int_c x^{۲} dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۲}(t)\big(-\sin t\big)dt = -\cos^{۳}(t)/۳\big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\int_c Q dy = \int_c -xy dy = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (-\cos t)(\sin t)(\cos t)dt = -\cos^{۳}(t)/۳\big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\int_c F \cdot dr = \frac{۲}{۳}.$$

□

توجه ۲۸۵. برای توابع برداری روی $\mathbf{R}^{۳}$ نیز به طور مشابه عمل می‌کنیم:

$$\int_c F.dr = \int_c P dx + Q dy$$

$$\int_c F.dr = \int_c P dx + Q dy + R dz \quad F = (P, Q, R)$$

یادآوری ۲۸۶. در ریاضی ۱ دیده‌اید که:

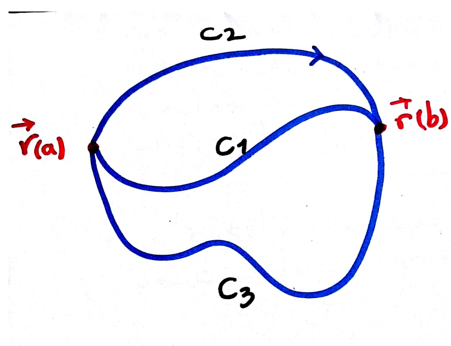
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

از فرمول بالا نتیجه می‌شود که:

$$c : \overrightarrow{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\int_c \nabla f \cdot dr = \int_c f_x dx + f_y dy + f_z dz = f\big(\overrightarrow{r}(b)\big) - f\big(\overrightarrow{r}(a)\big)$$

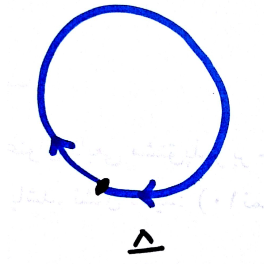
$$= f(\text{نقطه‌ی انتهائی خم}) - f(\text{نقطه‌ی ابتدائی خم})$$



۷

پس به نتیجه‌ی جالب زیر می‌رسیم:

توجه ۲۸۷. اگر F یک میدان برداری پایستار باشد آنگاه $\int_c F \cdot dr$ تنها به نقاط ابتدائی و انتهایی c بستگی دارد و انتگرال فوق روی مسیرهای بسته صفر است.



انتگرال توابع برداری پایستار از مسیر مستقل است (فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد). همچنین انتگرال توابع پایستار روی مسیرهای بسته برابر با صفر است.

حال از کجا می‌توانیم تشخیص دهیم که یک میدان برداری داده شده پایستار است یا خیر؟

فرض کنید $F = (P, Q)$ یک میدان برداری پایستار باشد.

$$\exists \underbrace{f}_{\text{تابع عددی}} \quad P = f_x \quad Q = f_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

در واقع تحت شرایطی مشخص،[۱۵] میدان برداری $F = \Big(P(x, y), Q(x, y)\Big)$ پایستار است اگر و تنها اگر

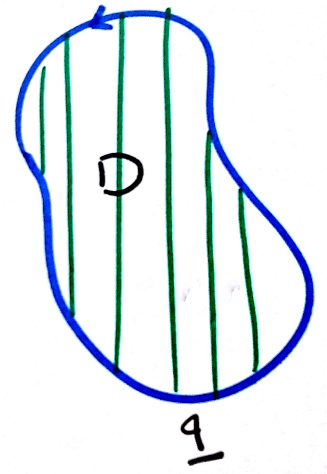
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

در جلسه‌ی آینده خواهیم دید که گاهی می‌توان انتگرال یک تابع برداری روی یک مسیر را با استفاده از یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن مسیر حساب کرد.

[۱۵] تابع برداری مورد نظر روی یک ناحیه‌ی همبند ساده تعریف شده باشد و در این ناحیه، P, Q دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند.

۲.۳۶ قضیه‌ی گرین

در جلسه‌ی آینده درباره‌ی قضیه‌ی گرین صحبت خواهیم کرد:



$$F = (P, Q)$$

انتگرال روی مسیر بسته‌ی c برابر است با

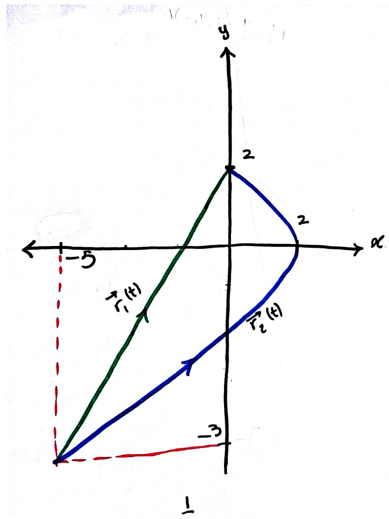
$$\oint_c F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

۳۷ جلسه‌ی سی و هفتم، شنبه، قضیه‌ی گرین

تمرین ۸۰. $\int_c y^۲dx+xdy$ را محاسبه کنید که در آن c شامل یک پاره خط از $(-۵,-۳)$ تا $(۰,۲)$ و سهمی $x=۴-y^۲$ از $(-۵,-۳)$ تا $(۰,۲)$ است.

پاسخ.

$$\int_c \Box = \int_{c_۱} \Box + \int_{c_۲} \Box$$



$$\overrightarrow{r}_۱(t) : (-۵,-۳)+(۵,۵)t = (\underbrace{-۵+۵t}_{x(t)}, \underbrace{-۳+۵t}_{y(t)}) \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱$$

$$\int_{c_۱} y^۲dx+xdy = \underbrace{\int_{c_۱} y^۲dx}_{A} + \underbrace{\int_{c_۱} xdy}_{B}$$

$$x=-۵+۵t \Rightarrow dx = ۵dt$$

$$A = \int_{c_۱} y^۲dx = \int_۰^۱ (-۳+۵t)^۲ ۵dt = \frac{(-۳+۵t)}{۳}|_۰^۱ = \dots$$

$$B = \int_{c_۱} xdy = \int_۰^۱ (-۵+۵t)۵dt = \dots$$

$$\overrightarrow{r}_۲(t) : (۴-t^۲, t)$$

$$\int_{c_۲} y^۲dx+xdy = \int_{-۳}^{۲} (t^۲)(-۲t)dt + (۴-t^۲)dt = \dots$$

حاصل انتگرال $\int_c y^۲dx+xdy$ برابر است با

$$\int_{c_۱} y^۲dx+xdy + \int_{c_۲} y^۲dx+xdy$$

تکمیل پاسخ بالا و انجام محاسبات را به عهده‌ی دانشجو می‌گذارم. $\Box$

انتگرال سوال قبل دارای صورت برداری زیر است:

$$\int_c (\overset{\overset{P}{\uparrow}}{y^۲}, \overset{\overset{Q}{\uparrow}}{x}) \cdot dr$$

گفتیم که اگر $Q_x = P_y$ میدان برداری پایستار است، پس در سوال قبل میدان برداری مورد نظر پایستار نیست.

یادآوری ۲۸۸. اگر $F = (P, Q, R)$ یک میدان برداری باشد و $\overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ آنگاه

$$\int_c F \cdot dr = \int_c Pdx + Qdy + Rdz$$

مثال ۲۸۹. $\int_c F \cdot dr$ را حساب کنید که در آن $F(x,y,z) = xy\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + zx\overrightarrow{k}$ و

$$c = \overrightarrow{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^۲ \\ z = t^۳ \end{cases} \qquad ۰ \leqslant t \leqslant ۱.$$

پاسخ.

$$\int_c F \cdot dr = \int_c xydx + yzdy + zxdx = \int_۰^۱ (t \times t^۲)dt + \int_۰^۱ (t^۲ \times t^۳)۲tdt + \int_۰^۱ (t^۳ \times t)۳t^۲dt = \dots$$

□

سوال ۲۹۰. ۱. تعیین کنید که آیا میدان $F(x,y) = \underbrace{(۳ + ۲xy)\overrightarrow{i}}_{P(x)} + \underbrace{(x^۲ - ۲y^۲)\overrightarrow{j}}_{Q(x)}$ پایستار است؟

پاسخ.

$$Q_x = ۲x \quad , \quad P_y = ۲x \quad Q_x = P_y$$

بنابراین میدان F پایستار است. □

۲. یک تابع $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ چنان بیابید که $\nabla f = F$.

پاسخ.

$$F(P,Q) = \nabla f = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

$$f_x(x,y) = ۳ + ۲xy \Rightarrow f(x,y) = ۳x + x^۲y + g(y)$$

$$f_y(x,y) = x^۲ - ۳y^۲$$

مشتق $f(x,y) = ۳x + x^۲y + g(y)$ بر حسب y برابر است با

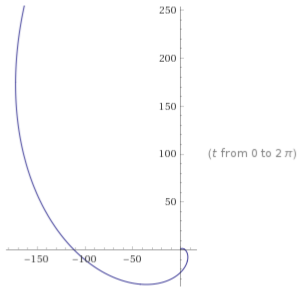
$$x^۲ + g'(y) = x^۲ - ۳y^۲ \Rightarrow g'(y) = -۳y^۲ \Rightarrow g(y) = -y^۳ + k$$

بنابراین

$$f(x,y) = ۳x + x^۲y - y^۳ + k$$

□

۳. حاصل $\int_c F\cdot dr$ را بیابید که در آن c توسط معادله‌ی برداری $\overrightarrow{r}(t) = (e^t\sin t, e^t\cos t)$ برای $۰ \leqslant t \leqslant \pi$ داده شده است.



پاسخ.

$$F(x,y) = (۳ + ۲xy)\overrightarrow{i} + (x^۲ - ۳y^۲)\overrightarrow{j}$$

$$\int_c F\cdot dr = \int_c Pdx + Qdy = \int_۰^{\pi} ۳ + ۲e^t\sin t e^t\cos t d(e^t\sin t)dt + \dots$$

محاسبه‌ی انتگرال بالا بسی دشوار است اما می‌دانیم که

$$\int_c F\cdot dr = \int_c \nabla f\cdot dr = f(\text{نقطه‌ی انتهایی}) - f(\text{نقطه‌ی شروع})$$

$$f(x,y) = ۳x + x^۲y - y^۳ + k$$

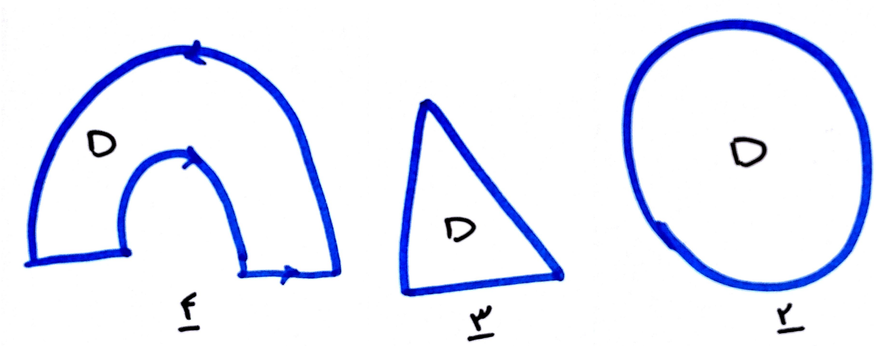
نقطه‌ی شروع c برابر است با $(۰,۱)$ و نقطه‌ی پایان برابر است با $(۰,-e^{\pi})$.

$$\int_c F\cdot dr = f(۰,-e^{\pi}) - f(۰,۱) = \dots$$

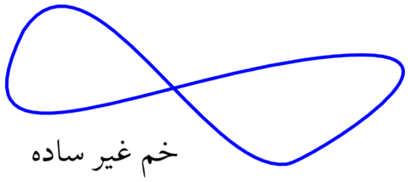
□

۱.۳۷ قضیه‌ی گرین

قضیه ۲۹۱ (قضیه‌ی گرین [۱۶]). فرض کنید c یک خم بسته‌ی به طور قطعه‌ای هموار، ساده و جهتدار در جهت مثبت باشد و D ناحیه‌ی احاطه شده توسط c باشد. دقت کنید که ساده بودن یعنی این که خم مورد نظر خودش را تنها در نقطه‌ی انتهائی قطع کند. جهتدار بودن در جهت مثبت یعنی وقتی در جهت خم به روی حرکت کنیم، ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن در سمت چپمان قرار گیرد. عکسهای ۲و۳و۴ نمونه‌های مطلوب برای اینگونه خمها هستند.



[۱۶] Green's theorem

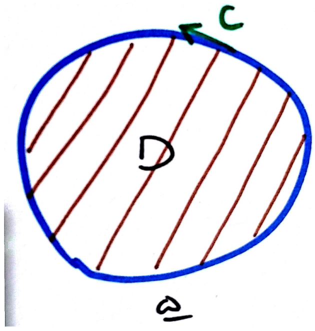


خم غیر ساده

فرض کنید P و Q مشتقات جزئی پیوسته در یک مجموعه‌ی باز شامل D داشته باشند. آنگاه

$$\oint_c \underbrace{Pdx + Qdy}_{F\cdot dr} = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\underbrace{\int_c F \cdot dr}_{\text{انتگرال از یک تابع برداری روی خم مرزی}} = \underbrace{\iint_D \Big(Q_x(x,y) - P_x(x,y)\Big)dxdy}_{\text{انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط خم}}$$

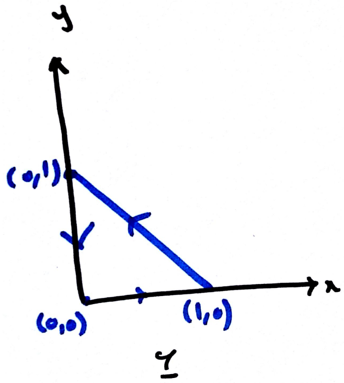


توجه ۲۹۲. فرض کنید P, Q روی c صفر باشند، آنگاه

$$\iint (Q_x - P_y)dA = ۰$$

مثال ۲۹۳. انتگرال زیر را با توجه به مسیر کشیده شده بیابید.

$$\oint_c x^۴ dx + xydy$$



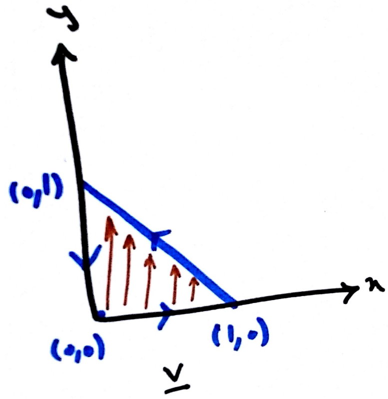
پاسخ.

$$P(x,y) = x^۴ \quad , \quad Q(x,y) = xy$$

$$P_y(x,y) = ۰, Q_x(x,y) = y$$

$$\int_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\iint_D ydy = \int_۰^۱ \int_۰^{۱-x} ydydx$$



$$\int_۰^{۱-x} ydy = \frac{y^۲}{۲}|_۰^{۱-x} = \frac{(۱-x)^۲}{۲}$$

$$\int_۰^۱ \frac{(۱-x)^۲}{۲}dx = -\frac{(۱-x)^۳}{۶}|_۰^۱ = \frac{۱}{۶}$$

□

مثال ۲۹۴. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_c (۳y - e^{\sin x})dx + (۷x + \sqrt{y^۴ + ۱})dy$$

$$c : x^۲ + y^۲ = ۹$$

$$P(x,y) = ۳y - e^{\sin x}$$

$$Q(x,y) = ۷x + \sqrt{y^۴ + ۱}$$

$$P_y(x,y) = ۳ \quad , \quad Q_x(x,y) = ۷$$

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$\iint_D ۴dA = ۴ \underbrace{\iint_D dA}_{\text{مساحت دایره}} =$$

$$۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۳ rdrd\theta = ۴\pi \times ۳^۲$$

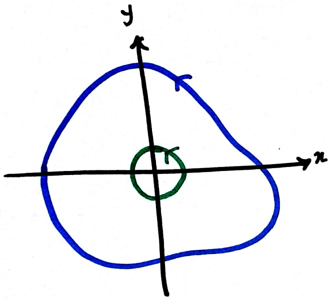
مثال ۲۹۵. فرض کنید $F(x,y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^۲+y^۲}$ نشان دهید که روی هر منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت که مبدأ را احاطه کند داریم:

$$\int_c F \cdot dr = ۲\pi$$

پاسخ. دقت کنید که تابع تحت انتگرال در مبدأ تعریف نشده است. پس نمی‌توان روی هر منحنی دلخواه به راحتی از قضیه‌ی گرین استفاده کرد. منحنی دلخواه c را در نظر بگیرید که در شکل زیر به رنگ آبی نشان داده شده است. یک منحنی کوچکتر جهتدار در داخل آن به رنگ سبز رسم کرده‌ایم که آن را $c_۱$ می‌نامیم. هدفمان نشان دادن این است که انتگرال برداری تابع مورد نظر، روی دو منحنی رسم شده با هم برابر است. برای این کار انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{c\cup(-c_۱)} Pdx + Qdy$$

از آنجا که تابع F در ناحیه‌ی بین دو خم تعریف شده است و در این ناحیه در شرایط قضیه‌ی گرین صدق می‌کند، برای



۸

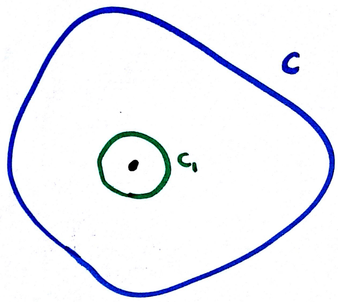
محاسبه‌ی انتگرال بالا از قضیه‌ی گرین، روی ناحیه‌ی بین خمها استفاده می‌کنیم:

$$Q(x,y) = \frac{x}{x^۲+y^۲} \Rightarrow Q_x(x,y) = \frac{(x^۲+y^۲) - ۲x^۲}{(x^۲+y^۲)} = \frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^۲+y^۲} \Rightarrow P_y(x,y) = \frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$Q_x = P_y \Rightarrow \int_{c\cup(-c_۱)} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA = ۰$$

$$\Rightarrow \int_c F\cdot dr = \int_{c_۱} F\cdot dr$$



۹

توجه ۲۹۶. از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که برای هر خم $c_۱$ و $c_۲$ دلخواه شامل مبدأ

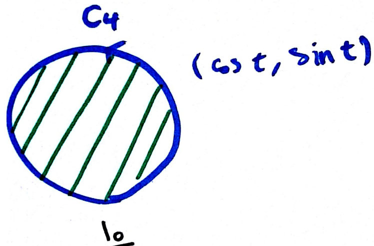
$$\int_{c_۱} Fdr = \int_{c_۲} Fdr$$

کافی است که یک خم $c_۳$ کوچکتر از $c_۱, c_۲$ در نظر بگیریم. آنگاه بنا بر آنچه در بالا ثابت کردیم انتگرال روی هر دوی این خمها برابر با انتگرال روی $c_۳$ است. حال از آنجا که انتگرال مورد نظر روی تمام خمها با هم برابر است، برای دانستن مقدار این انتگرال، کافی است

$$\int_c F\cdot dr$$

را روی خم ساده‌ی $(\cos t, \sin t)\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ محاسبه کنیم.

دقت کنید که در اینجا نیز باز نمی‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده کرد زیرا تابع در مبدأ تعریف نشده است. پس انتگرال مورد نظر را با استفاده از تعریف حساب می‌کنیم.



۱۰

$$\int_{c_4} F \cdot dr = \int_{c_4} Pdx + Qdy = \int_{c_4} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy =$$

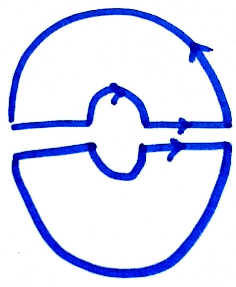
$$\int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)dt + \cos t(\cos t)dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 tdt + \cos^2 tdt = 2\pi$$

□

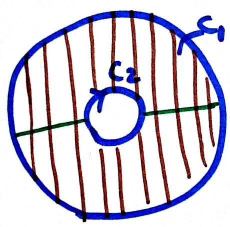
در مثال بالا از قضیه‌ی گرین برای نواحی حفره‌دار استفاده کردیم:

تمرین ۸۱. نشان دهید قضیه‌ی گرین برای نواحیِ دارای حفره مانند ناحیه‌ی زیر درست است (به جهت خمها توجه کنید)

$$\int_{c_1 \cup c_2} F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$



۱۲



۱۱

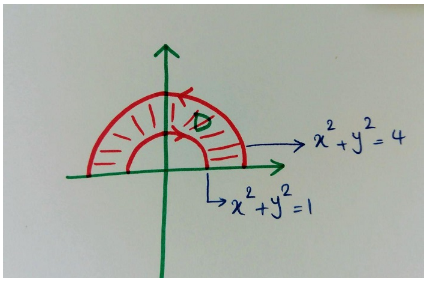
موضوعات جلسه‌ی بعد:

۱. انتگرال توابع عددی روی رویه

۲. انتگرال توابع برداری روی رویه (شار)

۳۸ جلسه‌ی سی و هشتم، دوشنبه

مثال ۲۹۷. $\oint_c y^۲dx + ۳xydy$ را محاسبه کنید که c مرز ناحیه‌ی D و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.



پاسخ. بنا به قضیه‌ی گرین:

$$\oint_c \underbrace{y^۲}_{P} dx + \underbrace{۳xy}_{Q} dy = \iint_D \underbrace{(۳y - ۲y)}_{y} dA = \int_۰^\pi \int_۱^۲ r(\sin\theta) r dr d\theta = \int_۰^\pi \sin\theta \times \int_۱^۲ r^۲ dr$$

$$= -\cos(\theta)|_۰^\pi \times \frac{r^۳}{۳}|_۱^۲ = \frac{۱۴}{۳}.$$

□

۱.۳۸ استفاده‌ی برعکس از قضیه‌ی گرین

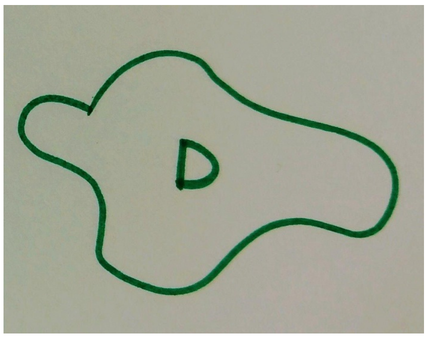
محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی D :

می‌دانیم که مساحت یک ناحیه‌ی D در فضای دو بعدی توسط انتگرالِ $\iint_D dA$ محاسبه می‌شود. فرض کنید ناحیه‌ی D توسط یک خمِ c احاطه شده باشد. بنا به قضیه‌ی گرین برای هر تابعِ برداریِ F داریم

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \int_c F.dr$$

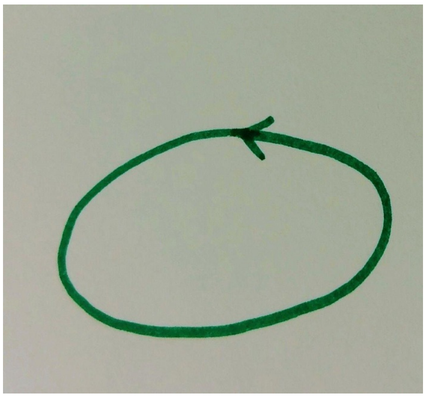
حال اگر یک تابع برداریِ $F = (P, Q)$ چنان بیابیم که $(Q_x - P_y) = ۱$ می‌توانیم مساحت ناحیه‌ی D را به آسانی با به دست آوردن مقدار $\int_c F.dr$ حساب کنیم. تابع F می‌تواند به عنوان مثال یکی از توابع زیر باشد:

$$F(x,y) = (۰, x) \quad F(x,y) = (-y, ۰), \quad F(x,y) = (-\frac{۱}{۲}y, \frac{۱}{۲}x)$$



$$\iint_D ۱dA = \iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_c xdy = -\oint_c ydx = \oint_c \underbrace{-\frac{۱}{۲}y}_{P} dx + \underbrace{\frac{۱}{۲}x}_{Q} dy$$

مثال ۲۹۸. مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را محاسبه کنید.



پاسخ.

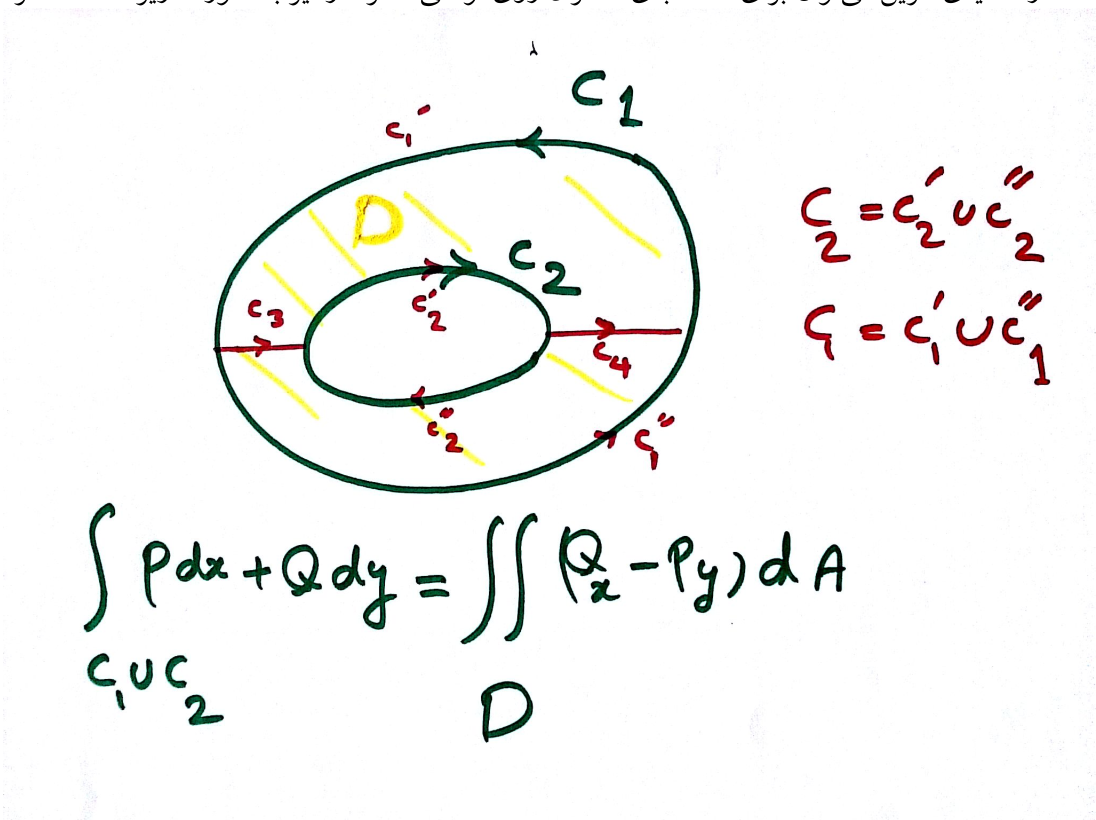
$$\iint_D 1dA=\frac{1}{2}\oint_c -ydx+xdy$$

$$c:\overrightarrow{r}(t):(a\cos\theta, b\sin\theta) \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$\iint_D 1dA=\frac{1}{2}\int_1^{2\pi}(b\sin\theta)a\sin\theta+a\cos\theta b\cos\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_1^{2\pi}abd\theta=\frac{1}{2}ab\times 2\pi=\pi ab$$

□

از قضیه‌ی گرین می‌توان برای محاسبه‌ی انتگرال روی نواحی حفره‌دار نیز به صورت زیر استفاده کرد:



اثبات.

$$D_1\bigcup D_2=D \quad , \quad c_1'\bigcup c''_1=c_1 \quad , \quad c_2'\bigcup c''_2=c_2$$

$$D: \oint_{c_1 \bigcup c_2} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA$$

$$D_1: \oint_{c'_1 \bigcup c'_2 \bigcup c_3 \bigcup c_4} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} (Q_x - P_y)dA$$

$$D_2: \oint_{c"_1 \bigcup c"_2 \bigcup (-c_3) \bigcup (-c_4)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} (Q_x - P_y)dA$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا:

$$\iint_D (Q_x - P_y)dA = \oint_c Pdx + Qdy$$

$\square$

۲.۳۸ انتگرالهای روی رویه

تا کنون با انتگرالهای روی خم آشنا شده‌ایم و دیدیم که دو نوع انتگرالگیری روی خم داریم:

۱) انتگرال توابع عددی روی خم

$$\int_c fds = \int f(r(t))r'(t)dt$$

۲) انتگرال توابع برداری روی خم

$$\int_c F.Tds = \int_c F.r'(t)dt = \int Pdx + Qdy + Rdz$$

همچنین بررسی کردیم که

$$\int_c fds = \int_{-c} fds$$

$$\int_c F.dr = -\int_{-c} F.dr$$

در ادامه‌ی درس قرار است با دو نوع انتگرالگیری روی رویه‌ها آشنا شویم:

۱) انتگرالگیری از توابع عددی روی رویه ها

۲) انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه ها

پیش از آن لازم است با رویه‌های پارامتری آشنا شویم:

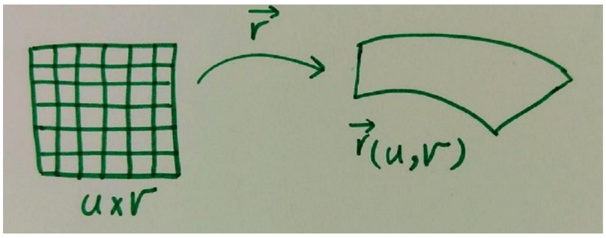
۱.۲.۳۸ رویه های پارامتری

یادآوری ۲۹۹. گفتیم که خمها را می‌توان به صورت زیر پارامتر بندی کرد:

$$c: r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

برای پارامتربندی رویه‌ها به دو متغیر نیازمندیم. یک رویه‌ی پارامتری توسط معادله‌ای برداری مانند معادله‌ی زیر داده می‌شود:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad a \leqslant u \leqslant b \quad , \quad c \leqslant v \leqslant d$$



مثال ۳۰۰. معادله‌ی پارامتری رویه‌ی $z = f(x,y)$ را بنویسید.(فرض کنید $a \leqslant x \leqslant b$ و $c \leqslant y \leqslant d$) رویه‌ی یادشده را می‌توان بدین صورت پارامتربندی کرد:

$$\overrightarrow{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)) \quad a \leqslant x \leqslant b \quad c \leqslant y \leqslant d$$

مثال ۳۰۱. کره ای به شعاع ۱ را پارامتر بندی کنید.

پاسخ.

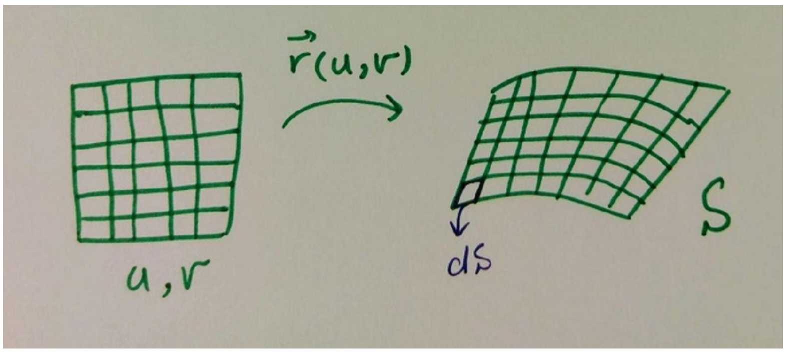
$$\rho = ۱$$

$$\overrightarrow{r}(\varphi,\theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

$$۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi \quad , \quad ۰ \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

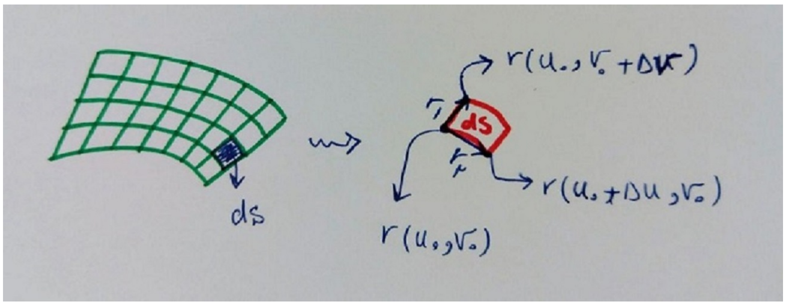
□

۲.۲.۳۸ انتگرال توابع عددی روی رویه ها



فرض کنید $f(x,y,z) : R^۳ \rightarrow R$ یک تابع باشد.

هدف: تعریف $\iint_S f(x,y,z) dS$ دقت کنید که از حالت بزرگ حرف S استفاده کرده‌ایم تا با انتگرال روی خمها اشتباه گرفته نشود.



$$\overrightarrow{r_1} : \overrightarrow{r}(u_\circ, v_\circ + \Delta v) - \overrightarrow{r}(u_\circ, v_\circ) \approx \Delta v r_v$$

$$\overrightarrow{r_2} : \overrightarrow{r}(u_\circ + \Delta u, v_\circ) - \overrightarrow{r}(u_\circ, v_\circ) \approx \Delta u r_u$$

$$dS = |r_u \times r_v| du dv$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{u,v\ \text{دامنه‌ی متغیرهای}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|r_u \times r_v| du dv$$

نتیجه ۳۰۲. مساحت رویه ی S برابر است با:

$$\iint_S dS = \iint_D |r_u \times r_v| du dv$$

مثال ۳۰۳. حاصل $\iint_S x^2 dS$ را محاسبه کنید که در آن S کره ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

پاسخ. نخست باید کره‌ی مورد نظر را پارامتربندی کنیم.

$$r(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

$$dS = |r_\varphi \times r_\theta| d\varphi d\theta$$

$$r_\varphi(\theta, \varphi) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

$$r_\theta(\theta, \varphi) = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$$

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{i}(+\sin^2\varphi\cos\theta) - \overrightarrow{j}(-\sin^2\varphi\sin\theta) + \overrightarrow{k}\underbrace{(\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta)}_{\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$|r_\varphi \times r_\theta| = \sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} =$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} = \sqrt{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \iint_S x^{۲} dS = \int_{۰}^{\pi} \int_{۰}^{۲\pi} (\sin\varphi\cos\theta)^{۲} \sin\varphi d\theta d\varphi = \underbrace{\int_{۰}^{\pi} \sin^{۳}\varphi d\varphi}_{A} \times \underbrace{\int_{۰}^{۲\pi} \cos^{۲}\theta d\theta}_{B}$$

$$A = \int \sin^{۲}\varphi (\sin\varphi) d\varphi = \int \underbrace{(۱ - \cos^{۲}\varphi)}_{۱-u^{۲}} \underbrace{(\sin\varphi) d\varphi}_{du} = \ldots$$

$$B = \int \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲} d\theta = \ldots$$

□

تمرین ۸۲. مساحت کره‌ی واحد را محاسبه کنید.

فرض کنید رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریح $z = f(x, y)$ باشد. آنگاه داریم:

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$r_x(x, y) = (۱, ۰, f_x) \qquad r_y(x, y) = (۰, ۱, f_y)$$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & f_x \\ ۰ & ۱ & f_y \end{vmatrix} = i(-f_x) - j(f_y) + k(۱) = (-f_x, -f_y, ۱)$$

$$dS = \underbrace{\sqrt{۱ + f_x^{۲} + f_y^{۲}}}_{\text{اندازه‌ی بردار گرادیان}} dxdy$$

مثال ۳۰۴. $\iint_S y dS$ را حساب کنید که در آن S رویه ی

$$z = x + y^{۲} \qquad ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \quad , ۰ \leqslant y \leqslant ۲$$

باشد.

پاسخ.

$$dS = \sqrt{۱ + (۱)^{۲} + (۲y)^{۲}} dxdy$$

$$\iint_S y dS = \int_{۰}^{۲} \int_{۰}^{۱} y\sqrt{۲ + ۴y^{۲}} dxdy = \int_{۰}^{۲} y \sqrt{\underbrace{۲ + ۴y^{۲}}_{u}} dy = \int \frac{\sqrt{u}}{۸} du = \frac{۲}{۳} \frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{۸} |_{۰}^{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}$$

□

از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۳۹ نیم جلسه‌ی سی و نهم، چهارشنبه

در جلسه‌ی قبل با **انتگراگیری از توابع عددی** روی رویه‌ها آشنا شدیم:

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f(\overrightarrow{r}(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| dudv$$

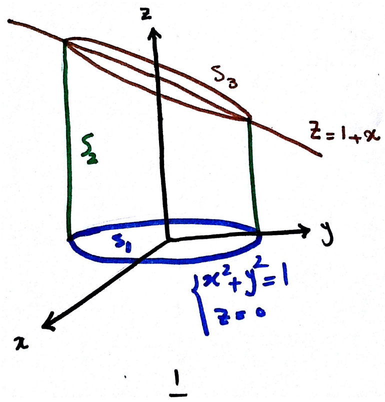
مثال ۳۰۵. $\iint_S z dS$ را بیابید که در آن S شامل سه رویه زیر است:

۱. از بغل، استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$

۲. از زیر، دیسک محدود به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه‌ی $z = ۰$

۳. از بالا، صفحه‌ی $z = ۱ + x$

پاسخ.



پارامتربندی $S_۲$:

$$r(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi, ۰ \leqslant z \leqslant ۱ + x = ۱ + \cos\theta$$

$$r_\theta(\theta, z) = (-\sin\theta, \cos\theta, ۰)$$

$$r_z(\theta, z) = (۰, ۰, ۱)$$

$$\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(\cos\theta) + \overrightarrow{j}(\sin\theta) + ۰\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{r}_\theta \times \overrightarrow{r}_z| = ۱$$

$$\iint_{S_۲} f dS = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{۱+\cos\theta} z dz d\theta = \dots$$

حال به سطح $S_۱$ می‌پردازیم. این سطح دارای معادله‌ی $z = ۰$ است. گفتیم که اگر سطحی با معادله‌ی $z = g(x, y)$ داده شده باشد، آنگاه $dS = \sqrt{g_x^۲ + g_y^۲ + ۱} dudv$.

$$\iint_{S_۱} f dS = \iint_{u,v} z \underbrace{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|}_{\sqrt{۱+g_x^۲+g_y^۲}} dudv \iint_{S_۱} ۰ \times ۱ dA = ۰$$

دقت کنید که در سطحِ S_1 مقدارِ z برابر با صفر است.

حال به سطح S_3 می‌پردازیم. این سطح هم دارای معادله‌ای به صورت $z = g(x,y)$ است.

$$S_3 : (x, y, \overset{g(x,y)}{\overbrace{1 + x}})$$

$$z = g(x,y) \to |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{S_3} z dS = \iint (1+x)\sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \cos\theta)\sqrt{2} r dr d\theta = \dots$$

□

یادآوری ۳۰۶. دوباره نحوه‌ی پارامتربندی رویه‌های به فرمِ $z = g(x,y)$ را یادآوری می‌کنم:

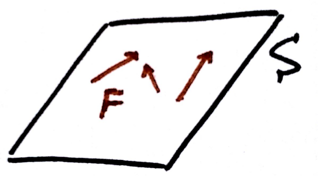
$$S : z = g(x,y)$$

$$\text{پارامتربندی رویه‌ی } S : \overrightarrow{r}(x,y) = \big(x, y, g(x,y)\big)$$

$$|\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

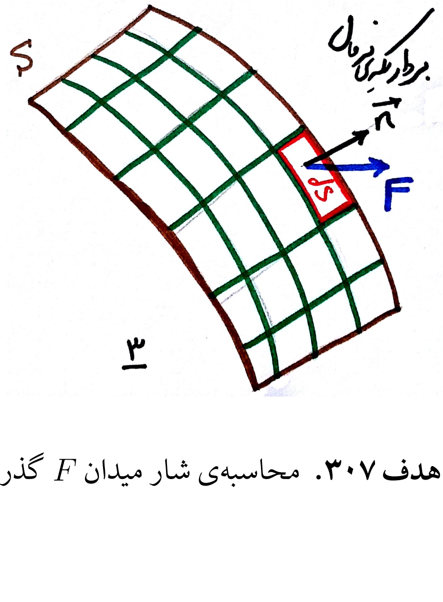
$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dA$$

۱.۳۹ انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها



۲

فرض کنید S یک رویه‌ی جهتدار باشد. یعنی فرض کنید که این رویه، دارای پشت و روی مشخص باشد. برای مثال یک توپ پلاستیکی که از وسط دو نیم شده باشد. فرض کنید $F(x,y,z) = (P, Q, R)$ یک میدان برداری باشد.



۳

هدف ۳۰۷. محاسبه‌ی شار میدان F گذرنده از رویه‌ی S.

دقت کنید که شار گذرنده از واحد سطح به صورت زیر محاسبه می‌شود (منظور از واحد سطح، سحطی به مساحت ۱ است):

$$F \cdot \overrightarrow{n}$$

در بالا منظور از $\overrightarrow{n}$ بردار یکه‌ی عمود است. پس شار گذرنده از سطح کوچکِ dS برابر است با

$$(F \cdot \overrightarrow{n})dS.$$

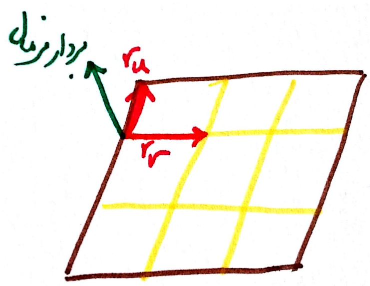
پس برای محاسبه شار گذرنده از سطحِ S باید تمام این شارهای کوچک را با هم جمع کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S (F \cdot \overrightarrow{n}) \overset{\overset{\text{مقدار عددی}}{\uparrow}}{dS}$$

فرض کنید رویه‌ی S با معادله‌ی زیر داده شده باشد.

$$r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$\text{یکه}\,\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|}$$



۴

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{(u,v)} \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| dudv = \iint_{(u,v)} F \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv$$

توجه ۳۰۸. برای انتگرالگیری از توابع برداری روی یک رویه، نخست یک جهت مشخص را برای رویه انتخاب می‌کنیم و سپس نسبت به آن جهت، شار گذرنده از رویه را حساب می‌کنیم. منظور، جهتی است که روی رویه به صورت پیوسته عوض شود و به صورت ناگهانی تغییر نکند. وقتی از فرمولِ $n = r_u \times r_v$ استفاده می‌کنیم، این فرمول، به صورت خود به خود یک جهت مشخص را برای رویه به دست می‌دهد، زیرا فرض کرده‌ایم که توابع r_u, r_v پیوسته‌اند.

مثال ۳۰۹. شار میدان $F(x,y,z) = z\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ را از سطح کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ بیابید.

پاسخ.

$$\overrightarrow{r}(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

$$r_\theta \times r_\phi = (\sin^۲\phi\cos\theta, \sin^۲\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)$$

$$\iint_S (z,y,x)\cdot(\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos\phi, \sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta)\cdot(\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi)+(\sin^3\phi\sin^2\theta)+(\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi)d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi d\phi d\theta = \cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta} \times \int_0^{\pi}\underbrace{\sin^2\phi}_{u^2}\underbrace{\cos\phi d\phi}_{du}$$

محاسبه‌ی انتگرالهای سوال بالا به عهده‌ی شما.

توجه ۳۱۰. برای ادامه‌ی حل سوال بالا، از درس ریاضی ۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی دو انتگرال را یادآوری می‌کنم

$$\int\sin^3\phi d\phi = \int\sin^2\phi\sin\phi d\phi = \int(1-\cos^2\phi)\sin\phi = \int -(1-u^2)du = \dots$$

$$\int\sin^2 x dx = \int\frac{(1-\cos(2x)}{2})dx = \dots$$

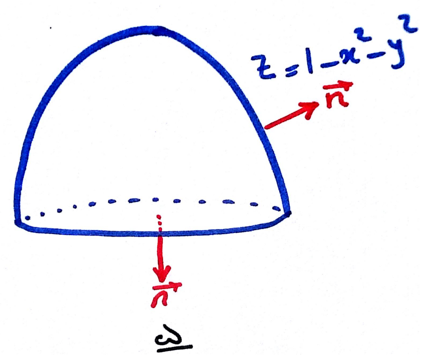
$$\int\cos^2 x dx = \int\frac{(1+\cos(2x)}{2})dx = \dots$$

$\square$

مثال ۳۱۱. انتگرال $\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صلب E باشد که توسط سهمی‌وار $z=1-x^2-y^2$ و صفحه‌ی $z=0$ احاطه شده است.

$$F(x,y,z) = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

پاسخ.



توجه ۳۱۲. فرض کنید $F=(P,Q,R)$. اگر $S: z=g(x,y)$ آنگاه

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{(x,y)}(-Pg_x - Qg_y + R)dxdy$$

$$r_u\times r_v = (-g_x, -g_y, 1)$$

$\square$

در این جلسه با انتگرال زیر آشنا شدیم:

$$\iint_S F.ndS = \iint F.\overrightarrow{dS}$$

به هر دو نمادگذاری بالا دقت داشته باشید. در طی این چند جلسه‌ی آخر با انتگرالهای زیر آشنا شده‌ایم. تعریف هر یک را برای خود مرور کنید:

$$\int_c f dr \quad \int_c F.dr$$

$$\iint_S f dS \quad \iint_S F.ndS$$

نامهای این انتگرالها بدین صورت هستند: تابع عددی روی خم، تابع برداری روی خم، تابع عددی روی رویه، تابع برداری روی رویه.

۴۰ جلسه‌ی چهلم، شنبه، قضیه‌ی استوکس

یادآوری ۳۱۳. گفتیم که اگر $r(u,v)$ یک رویه‌ی پارامتربندی شده باشد و F یک میدان برداری باشد، آنگاه

$$\iint_S F\cdot ndS=\iint_{u,v}(F\cdot r_u\times r_v)dudv$$

همچنین دیدیم که اگر رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریحِ $z=g(x,y)$ باشد و میدان مورد نظر به صورت $F=(P,Q,R)$ باشد، فرمول بالا به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

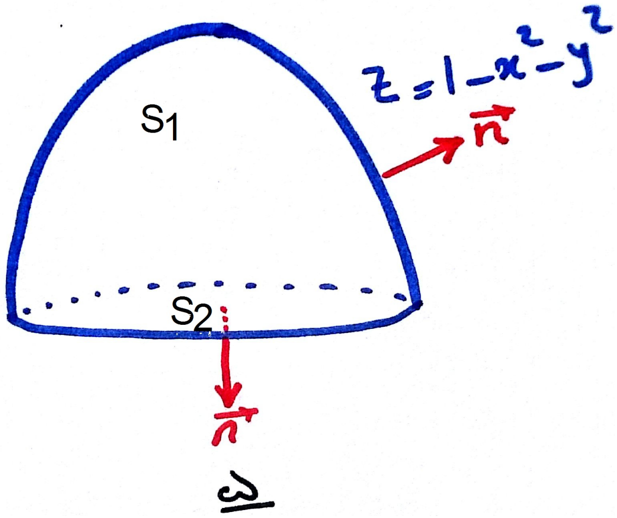
$$\iint_S F\cdot ndS=\iint_{(x,y)}(-Pg_x-Qg_y+R)dxdy$$

همچنین گفتیم که دو نمادِ $\iint F.ndS$, $\iint F.d\overrightarrow{S}$ هر دو برای یک معنی به کار می‌روند.

مثال ۳۱۴. انتگرال $\iint_S F\cdot\overrightarrow{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صُلبِ E باشد که توسط سهمی‌وارِ $z=۱-x^۲-y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$ احاطه شده است و

$$F(x,y,z)=y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$$

پاسخ.



$$S_۱: z=۱-x^۲-y^۲$$

$$r_x\times r_y=(۲x,۲y,۱)$$

$$(x,y)\in x^۲+y^۲=۱ \text{ دایره‌ی}$$

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS=$$

$$\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱}(x,y,z)\cdot(۲x,۲y,۱)dxdy=\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱}(۲xy+۲xy+z)dxdy=$$

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۴r^۲\cos\theta\sin\theta+(۱-r^۲)rdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۴r^۳\cos\theta\sin\theta drd\theta+\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(۱-r^۲)rdrd\theta=$$

$$\int_{۰}^{۲\pi} \underbrace{\sin\theta}_{u} \underbrace{\cos\theta d\theta}_{du} \times \int_{۰}^{۱} ۴r^{۳}dr + ۲\pi \int_{۰}^{۱} (r - r^{۳})dr =$$

$$(\frac{\sin^{۲}\theta}{۲})|_{۰}^{۲\pi} \times r^{۴}|_{۰}^{۱} + ۲\pi(\frac{r^{۲}}{۲} - \frac{r^{۴}}{۴})|_{۰}^{۱} = \pi$$

$$S_{۲} : z = ۰$$

$$r_x \times r_y = (۰, ۰, ۱)$$

چون جهت به سمت پایین است پس می‌نویسیم:

$$r_x \times r_y = (۰, ۰, -۱)$$

دقت کنید که جهت پائین را به این علت در نظر گرفته‌ایم که جهتگیری کلی به سمت خارج از جسم احاطه‌شده باشد.

$$\iint_{(x,y)\in x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱} (x, y, z) \cdot (۰, ۰, -۱)dxdy = \iint_{(x,y)\in x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱} (\cancel{-z})dxdy = ۰$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_{۱}} + \iint_{S_{۲}} = \pi + ۰ = \pi$$

□

تمرین ۸۳. مثال بالا را با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس حل کنید (این تمرین را وقتی جلسه‌ی آخر درس تمام شد، حل کنید!)

توجه ۳۱۵. فرض کنید E یک میدان الکتریکی باشد. بنا به **<u>قانون گاوس</u>** بار احاطه شده در درون یک رویه‌ی بسته‌ی S برابر است با

$$Q = \epsilon_{۰} \iint_S E \cdot \overrightarrow{n} dS$$

که در آن

$$\epsilon_{۰} \simeq ۸/۸۵۴۲ \times ۱۰^{-۱۲}$$

ضریب گذردهی خلأ است.

۱.۴۰ کِرْل

کلمه‌ی کِرْل [۱۷] به معنی پیچش است. فرض کنید $F(x, y, z)$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{curl}F := \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla} \times F$$

فرمول بالا تنها یک نمایش ساده‌تر برای فرمول دقیقی است که در ادامه درباره‌ی آن گفته‌ایم.
دقت کنید که

$$\text{curl}F : \mathbf{R}^{۳} \to \mathbf{R}^{۳}$$

[۱۷] curl

خودْ یک میدان برداری است. اگر F میدان سرعت یک مایع باشد، آنگاه جهت $\mathrm{curl}F$ با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود و اندازه‌ی $\mathrm{curl}F$ میزان تمایل این مایع را به چرخش حول یک نقطه نشان می‌دهد.
بیائید فرمول دقیق کرل را بنویسیم:

$$F = (P, Q, R) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) + \overrightarrow{j}\Big(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\Big) + \overrightarrow{k}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

توجه ۳۱۶. به دلایلی که بعداً خواهیم دید (قضیه‌ی استوکس) اگر F یک میدان برداری باشد آنگاه $\mathrm{curl}F(x,y,z)$ تمایل F به چرخش حول (x,y,z) را نشان می‌دهد. (نادقیق).

مثال ۳۱۷. فرض کنید $F = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^۲\overrightarrow{k}$. آنگاه $\mathrm{curl}F$ را حساب کنید.

پاسخ.

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^۲ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(-۲y - xy) + \overrightarrow{j}(x) + \overrightarrow{k}(yz)$$

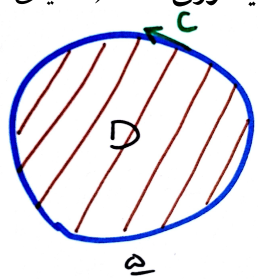
□

توجه ۳۱۸. (در صورتی که اجزاء میدانِ برداریِ F دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند) میدان F پایستار است اگروتنهااگر $\mathrm{curl}F = (۰,۰,۰)$

اثبات. به آسانی می‌توان دید که اگر $F = (g_x, g_y, g_z)$ آنگاه $\nabla \times F = (۰,۰,۰)$ □

حال همه چیز برای بیان قضیه‌ی استوکس مهیا است. قضیه‌ی استوکس در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گرین است. بیائید قضیه‌ی گرین را دوباره با هم مرور کنیم.

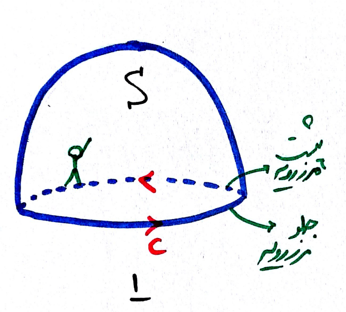
یادآوری ۳۱۹ (قضیه‌ی گرین).



$$F(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big)$$

$$\oint_c F \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$$

۲.۴۰ قضیه‌ی استوکس



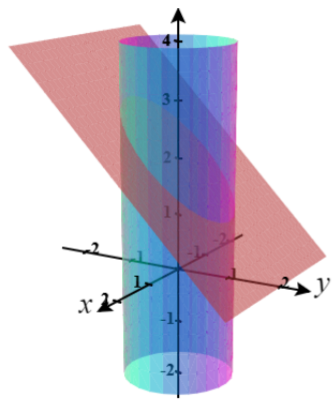
$$\int_c F\cdot dr=\iint_S \operatorname{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

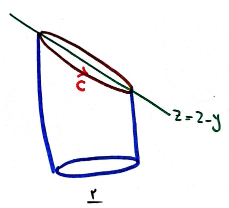
شرایط قضیه: اجزای F مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. S یک رویه‌ی جهتدار به طور قطعه‌ای هموار است (یعنی می‌تواند اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار باشد). c منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت است و در واقع مرز رویه است. جهت مثبا یعنی وقتی روی منحنی حرکت می‌کنیم و سرمان به سمت بردار نرمال رویه است، آنگاه رویه در سمت چپ ما قرار می‌گیرد.

تمرین ۸۴. نشان دهید که قضیه‌ی گرین از قضیه‌ی استوکس نتیجه می‌شود.

مثال ۳۲۰. حاصل $\int_c F\cdot dr$ را بیابید که در آن $F=(-y^۲,x,z^۲)$ و c منحنی محل اشتراک صفحه‌ی $y+z=۲$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ است که با نگاه از بالا در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

پاسخ.





پاسخ اول. بدون قضیه‌ی استوکس:

$$c:\overrightarrow{r}(t):(\cos t,\sin t,۲-\sin t)\quad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

$$F=(-y^۲,x,z^۲)$$

$$\int_c F\cdot dr=\int_۰^{۲\pi}Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$\int_۰^{۲\pi}(-\sin^۲ t)(-\sin t)dt+\cos t\cos t dt+(۲-\sin t)^۲(-\cos t)dt=\dots$$

پاسخ دوم. با استفاده از قضیه‌ی استوکس:

$$\int_c F\cdot dr=\iint_S \mathrm{curl}F\cdot ndS$$

که S را سطحی در نظر گرفته‌ایم که دور آن محل تماس استوانه با رویه است.

$$\mathrm{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y^۲ & x & z^۲\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}(۰)+\overrightarrow{j}(۰)+\overrightarrow{k}(۱+۲y)$$

$$S: z=۲-y$$

$$n=(۰,۱,۱)$$

$$\iint_{(x,y)\in x^۲+y^۲\leqslant ۱}(۰,۰,۱+۲y)\cdot(۰,۱,۱)dxdy=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(۱+۲r\sin\theta)rdrd\theta=\dots$$

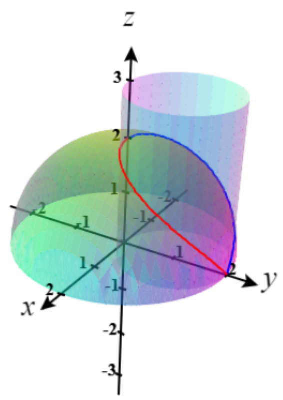
□

سوال ۳۲۱. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم کُره‌ی $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ باشد که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ محصور شده است.

آ. حاصلِ $\iint_S zdS$ را محاسبه کنید.

ب. اگر $F=(-y,x,z)$ و c مرز رویه‌ی بالا باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم کره) آنگاه $\int_c F\cdot dr$ را بیابید.

پاسخ. آ.



$$\iint_S fdS=\iint_S f|r_u\times r_v|dudv$$

در اینجا ضابطه‌ی صریحی به صورت

$$z=g(x,y)$$

داریم. پس انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_{(x,y)} f\sqrt{g_x^۲+g_y^۲+۱}dxdy$$

$$g_x = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}} \quad g_y = \frac{-۲y}{۲\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$$

$$dS = \sqrt{g_x^۲ + g_y^۲ + ۱}dxdy = \sqrt{\frac{۴x^۲ + ۴y^۲}{۴(۴ - x^۲ - y^۲)} + ۱}dxdy =$$

$$\sqrt{\frac{x^۲ + y^۲ + ۴ - x^۲ - y^۲}{(۴ - x^۲ - y^۲)}}dxdy = \sqrt{\frac{۴}{۴ - x^۲ - y^۲}}dxdy$$

$$\iint_{(x,y)} zdS = \iint \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}\sqrt{\frac{۴}{۴ - x^۲ - y^۲}}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۲\sin\theta} ۲rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} ۴\sin^۲\theta d\theta =$$

$$۴\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \cos ۲\theta}{۲} d\theta = \ldots$$

ب.

$$\int F \cdot dr = \iint_S \mathrm{curl} F \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\mathrm{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(۰) + \overrightarrow{j}(۰) + \overrightarrow{k}(۱ + ۱) = ۲\overrightarrow{k}$$

$$\iint \mathrm{curl} F \cdot ndS = \iint_S (-g_x, -g_y, ۱) \cdot (۰, ۰, ۲)dS = \iint_S ۲dS = \ldots$$

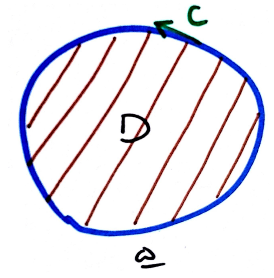
انتگرال بالا را در قسمت قبلی سوال حساب کرده‌ایم.

□

۴۱   جلسه‌ی چهل و یکم، دوشنبه، قضیه‌ی دیورژانس

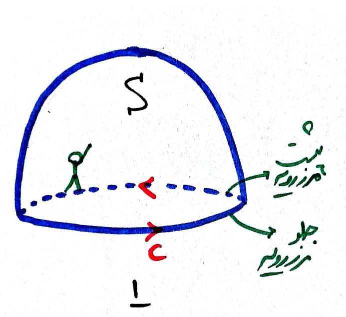
درجلسات گذشته با قضایای گرین و استوکس آشنا شدیم. قضیه‌ی گرین به صورت زیر بود:

$$F = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$
$$\oint_c F \cdot dr = \oint_c P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



و قضیه‌ی استوکس به صورت زیر است:

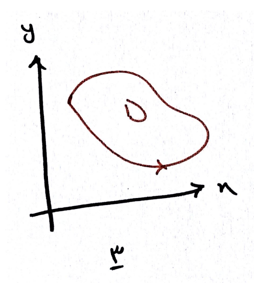
$$F = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$$
$$\oint_c F \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_S \mathrm{curl} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$



توجه ۳۲۲. قضیه‌ی گرین در واقع حالت خاصی از قضیه‌ی استوکس است.

$$\overrightarrow{F} = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big)$$

یکه‌ی عمود $\overrightarrow{n} = (۰, ۰, ۱)$



بنا به قضیه‌ی استوکس:

$$\oint_c F \cdot dr = \int P dx + Q dy = \iint_D \mathrm{curl} F \cdot \overrightarrow{n}\, dA$$

محاسبه‌ی $\text{curl}F$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & ۰ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(۰) + \overrightarrow{j}(۰) + \overrightarrow{k}(Q_x - P_y)$$

جایگذاری در فرمول بالا:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

در ادامه‌ی درس با قضیه‌ی دیورژانس آشنا خواهیم شد. شهود پشت این قضیه بدین صورت است. فرض کنید که جسمی کُروی در معرض میدان سرعت یک سیال گذاشته شود. شار گذرنده از سطح این جسم، بستگی به میزان مایعِ احاطه شده در درون آن دارد. بنابراین یک انتگرال برداری روی یک سطح را باید بتوان با یک انتگرال عددی روی حجم درون آن محاسبه کرد.

۱.۴۱ قضیه‌ی دیورژانس

تعریف ۳۲۳. فرض کنید $F = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{div}F := \nabla \cdot F = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \cdot (P, Q, R) = P_x + Q_y + R_z$$

مثال ۳۲۴. فرض کنید $F = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{k}$ دیورژانس F را بدست آورید.

پاسخ.

$$\text{div}F = z + xz + ۰ = z + zx$$

□

توجه ۳۲۵. اگر $F = (P, Q, R)$ یک تابع برداری از $\mathbf{R}^۳$ به $\mathbf{R}^۳$ باشد آنگاه

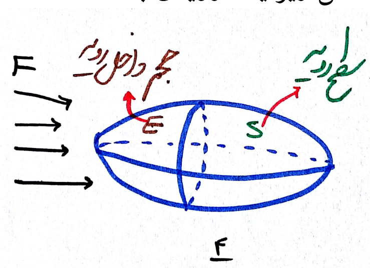
$$\text{curl}F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}^۳$$

$$\text{div}F : \mathbf{R}^۳ \to \mathbf{R}$$

قضیه ۳۲۶ (دیورژانس).

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n} dS = \iiint_E \text{div}F dv$$

شکل زیر یک رویه‌ی بسته است.



شرایط قضیه:

۱. جهت S به سمت بیرون از جسم احاطه شده توسط رویه است.

۲. اجزای F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند. (در یک ناحیه‌ی باز شامل کل سیستم)

۳. رویه‌ی S به طور قطعه‌ای هموار (یعنی اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار) و بسته است. (به بسته بودن رویه دقت داشته باشید. این رویه در واقع یک جسم صلب را به طور کامل احاطه کرده است).

قضیه‌ی دیورژانس را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS=\iiint_E \nabla\cdot F dv$$

مثال ۳۲۷. شار میدان $F(x,y,z)=z\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+x\overrightarrow{k}$ را از سطح کُره‌ی واحدِ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ بیابید.

پاسخ. راه اول. با محاسبه‌ی مستقیم

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS$$

راه دوم. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس

$$\text{div}F=۱$$

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS=\iiint_E \text{div}F dv=\underbrace{\iiint_E ۱dv}_{\text{حجم کُره}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

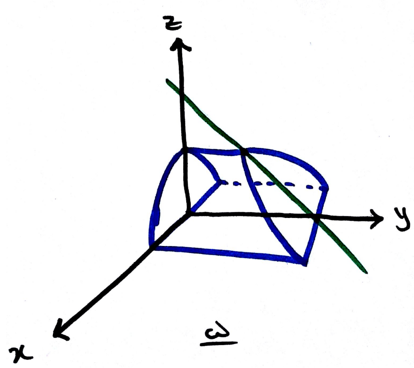
□

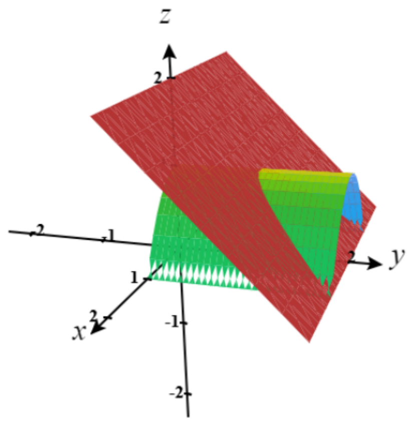
مثال ۳۲۸. فرض کنید $F(x,y,z)=xy\overrightarrow{i}+(y^۲+e^{xz^۲})\overrightarrow{j}+\sin(x,y)\overrightarrow{k}$ و فرض کنید S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی $z=۱-x^۲$ و صفحات $z=۰$، $y=۰$ و $y+z-۲$ باشد. $\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS$ را بیابید.

پاسخ.

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}dS=\iiint_E \text{div}F dv$$

$$\text{div}F=y+۲y+۰=۳y$$





$$E = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2 - z, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2\}$$

$$\iiint_E \operatorname{div} F dv = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} 3y dy dz dx$$

$$\int_0^{2-z} 3y dy = \frac{3}{2} y^2 |_0^{2-z} = \frac{3}{2}(2, z)^2 = \frac{3}{2}(4 - 2z + z^2)$$

$$\frac{3}{2} \int_0^{1-x^2} (4 - 2z + z^2) dz = \frac{3}{2}(4z - z^2 + \frac{z^3}{3})|_0^{1-x^2} =$$

$$\frac{3}{2}(4(1-x^2) - (1-x^2)^2 + \frac{(1-x^2)^3}{3}) = 6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2}$$

حاصل نهایی برابر است با

$$\int_{-1}^{1} \Big(6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2}\Big) dx = \dots$$

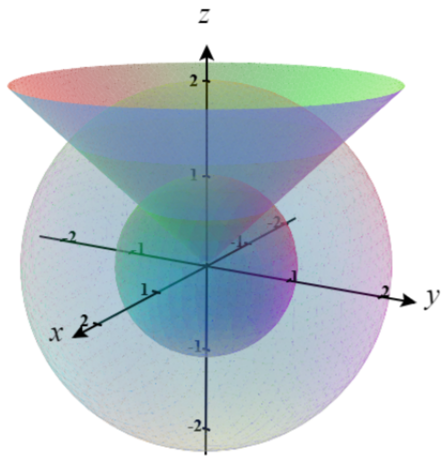
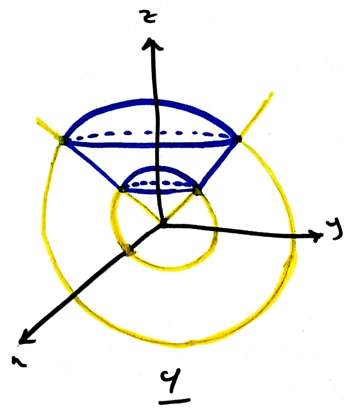
□

مثال ۳۲۹. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^2+y^2+z^2 = 1$ و $x^2+y^2+z^2 = 4$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ باشد.

۱. حجم ناحیه‌ی T را بیابید.

۲. فرض کنید $F = \big(x + z^2 e^y, y - x\sin(xz^2), z + \frac{y}{1+x^2}\big)$ آنگاه $\iint_S F \cdot n dS$ را بیابید که در آن S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی بالا است.

پاسخ.

۱.

$$۱ \leqslant \rho \leqslant ۲ \quad ۰ \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{۴} \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$$

$$T\ \text{حجم} = \iiint_E dv = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۱^{۲} \rho^۲ \sin\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \sin\phi d\phi \int_۱^{۲} \rho^۲ d\rho = ۲\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\frac{۷}{۳}$$

۲.

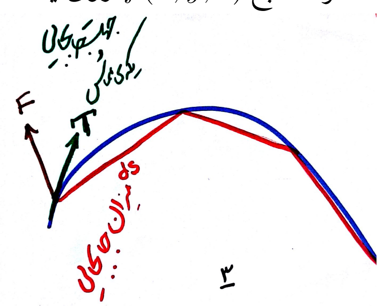
$$\text{div}F = ۱+۱+۱ = ۳$$

$$\iint_S F\cdot\vec{n}dS = \iiint_T \text{div}F dv = ۳\times T\ \text{حجم} = ۱۴\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

□

۲.۴۱ مرور درس

۱. انتگرال تابع $f(x,y,z)$ روی یک خم c به معادله‌ی $a \leqslant t \leqslant b \quad \vec{r}(t)$.



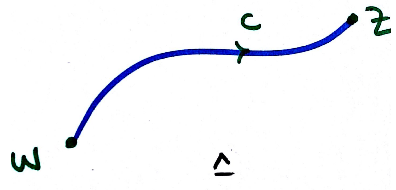
$$\int_c f ds = \int_c f\big(x(t),y(t),z(t)\big)|r'(t)|dt$$

$$ds = \sqrt{dx^۲+dy^۲+dz^۲}dt = |r'(t)|dt$$

۲. طول خم از نقطه‌ی $t=a$ تا $t=b$:

$$\int_c ds = \int_a^b |r'(t)|dt$$

۳. انتگرال تابع برداری $F(x,y,z)=(P,Q,R)$ روی خم $\overrightarrow{r}(t)$.



$$\int_c \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_c Pdx+Qdy+Rdz =$$

$$\int_a^b P\big(\overrightarrow{r}(t)\big)x'(t)dt + Q\big(\overrightarrow{r}(t)\big)y'(t)dt + R\big(\overrightarrow{r}(t)\big)z'(t)dt$$

۴. انتگرال تابع عددی روی رویه

$$S: r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f\big(r(u,v)\big)|r_u\times r_v|dudv$$

$$dS = |r_u\times r_v|dudv$$

اگر معادله‌ی صریح رویه را داشته باشیم:

$$S: z=g(x,y)$$

$$dS = \sqrt{۱+g_x^۲+g_y^۲}$$

$$\iint_S f dS = \iint_{x,y} f\sqrt{۱+g_x^۲+g_y^۲}dxdy$$

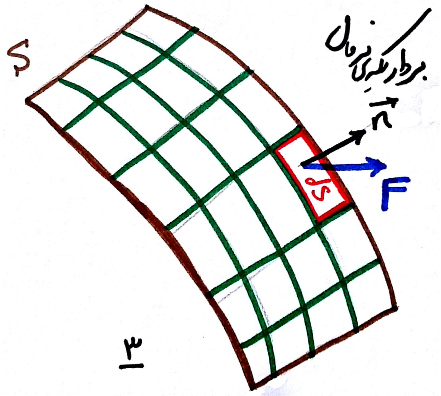
۵. مساحت یک رویه با معادله‌ی پارامتریِ $r(u,v)$:

$$\iint_S dS = \iint_{u,v} |r_u\times r_v|dydv$$

۶. مساحت یک رویه با معادله‌ی صریحِ $z=g(x,y)$

$$\iint_S dS = \iint_{x,y} \sqrt{۱+g_x^۲+g_y^۲}dxdy$$

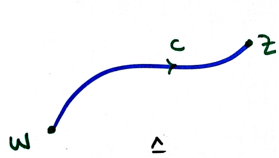
۷. انتگرال توابع برداری روی رویه‌ها



$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \begin{cases} r(u,v) \text{ رویه‌ی پارامتری } & \iint_{u,v} F.(r_u\times r_v)dudv \\ z=g(x,y) \text{ رویه‌ی } & \iint_{(x,y)} F\cdot(-g_x,-g_y,۱)dxdy = \iint(-Pg_x-Qg_y+R)dxdy \end{cases}$$

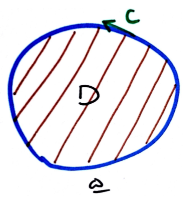
۸.

$$\int_c \nabla f dr = f(Z)-f(W)$$



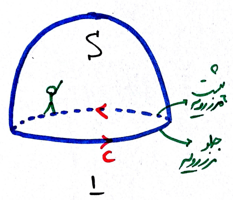
۹. (قضیه‌ی گرین)

$$\underbrace{\oint_c F\cdot dr}_{=\oint_c Pdx+Qdy} = \iint_D (Q_x-P_y)dxdy$$



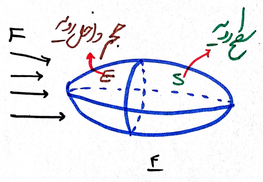
۱۰. (قضیه‌ی استوکس)

$$\oint_c F\cdot dr = \iint_S \mathrm{curl}F\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$



۱۱. (قضیه‌ی دیورژانس)

$$\iint_S F\cdot ndS = \iiint_E \mathrm{div}F dv$$


F
حجم داخل رویه
سطح رویه
E
S
۴

۴۲ تمرین

تمرین ۸۵. فرض کنید $F(x,y)=(\sin x, \sin y+xy^۲+\frac{۱}{۳}x^۳)$ یک میدان نیرو باشد که ذره‌ای را با شروع از مبدأ ابتدا در راستای محورِ x تا نقطه‌ی $(۵,۰)$ می‌برد و سپس روی دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲۵$ و در ربع اول، به نقطه‌ی $(۰,۵)$ می‌برد و سپس در راستای محورِ y به مبدأ بازمی‌گرداند. کار انجام شده توسط این میدان نیرو، در طی این مسیر را بیابید.

تمرین ۸۶. فرض کنید $F(x,y,z)=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ و نیز فرض کنید رویه‌ی S بخشی از کُره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ باشد که در بالای صفحه‌ی xy توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ احاطه شده است. حاصلِ $\iint \mathrm{curl}F.dS$ را بیابید.

تمرین ۸۷. فرض کنید C یک منحنی بسته‌ی هموار باشد که در صفحه‌ی $x+y+z=۱$ واقع شده است. نشان دهید که حاصل انتگرال خطیِ

$$\int_c zdx-۲xdy+۳ydz$$

تنها به مساحت ناحیه‌ی احاطه‌شده توسطِ C بستگی دارد و به شکلِ C و محل آن در صفحه بستگی ندارد.

تمرین ۸۸. با استفاده از قضیه‌ی استوکس، حاصل

$$\int_c (y+\sin x)dx+(z^۲+\cos(y))dy+x^۳dz$$

را بیابید که در آن c منحنیِ داده شده توسط معادله‌ی برداری زیر است:

$$\overrightarrow{r}(t)=(\sin(t),\cos(t),\sin(۲t)) \quad ۰\leq t\leq ۲\pi.$$

(راهنمائی: توجه کنید که c روی رویه‌ی $z=۲xy$ واقع شده است).

تمرین ۸۹. فرض کنید $F(x,y,z)=(xy+۲xz)\mathbf{i}+(x^۲+y^۲)\mathbf{j}+(xy-z^۲)\mathbf{k}$. نیز فرض کنید که S سطح دور جسمی باشد که توسطِ استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و صفحه‌های $z=y-۲$ و $z=۰$ احاطه شده است. حاصلِ $\int_S F.dS$ را محاسبه کنید.

تمرین ۹۰. فرض کنید $F(x,y,z)=(۲x^۳+y^۳)\mathbf{i}+(y^۳+z^۳)\mathbf{j}+۳y^۲z\mathbf{k}$ و فرض کنید که S سطح سهمی‌وارِ $z=۱-x^۲-y^۲$ در بالای محورِ z باشد. حاصلِ $\int_S F.dS$ را بیابید. (راهنمائی: برای استفاده از قضیه‌ی استوکس باید سطح رویه‌ی $z=۰$ را نیز به رویه‌ی S اضافه کنید تا به یک سطح بسته برسید).

تمرین ۹۱. حاصل انتگرالِ $\iiint_E y^۲z^۲$ را بیابید که در آن E ناحیه‌ی واقع در بالای مخروطِ $\phi=\frac{\pi}{۳}$ و زیر کره‌ی $\rho=۱$ است.

تمرین ۹۲. حاصلِ $\iiint_E xe^{x^۲+y^۲+z^۲}dv$ را بیابید که در آن E بخشی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲\leq ۱$ است که در یک‌هشتم اول مختصات واقع شده است.