

نمونه‌ی سوال امتحان میانترم ریاضی دو عمومی

سوالات امتحان میانترم درس ریاضی دو عمومی، بسیار مشابه با سوالهای زیر است. پنج سوال از میان سوالهای زیر برای امتحان انتخاب خواهند شد. توجه کنید که ممکن است عین سوال در امتحان نیاید و تغییرات کوچکی در آن داده شود.

سوال ۱. رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$(آ) \quad z = x^2 - y^2$$

$$(ب) \quad z - x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$$

$$(ج) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$(د) \quad x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 6z - 5 = 0$$

$$(ه) \quad z = x^2 + y^2$$

$$(و) \quad z - x^2 - y^2 + 10x + 6y = 37$$

$$(ز) \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$(ح) \quad z^2 - x^2 - y^2 - 2z + 2x + 2y - 1 = 0$$

$$(ط) \quad z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

$$(ی) \quad z = 2x + 1$$

$$(یا) \quad z = \sin(x)$$

سوال ۲. فرض کنید که در نقطه‌ی $(1, 0, 1)$ قرار داریم و 5 واحد روی منحنی $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \cos t \mathbf{k}$ حرکت می‌کنیم. به کدام نقطه روی منحنی می‌رسیم؟

سوال ۳. منحنی زیر را بر حسب طول با شروع از نقطه‌ی $(1, 0)$ پارامتر بندی کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)\mathbf{j}$$

سوال ۴. مفاهیم زیر را توضیح مختصری دهید که متقاعد کند که آنها را فهمیده‌اید: انحنا، صفحه‌ی بوسان، تعبیر هندسی مشتق‌های جزئی تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) .

سوال ۵. معادله‌ی دایره‌های بوسان بر سهمی $9x^2 + 4y^2 = 36$ را در نقاط $(2, 0)$ و $(0, 3)$ را بیابید.

سوال ۶. نشان دهید که منحنی $\mathbf{r}(t) = (t + 2, 1 - t, \frac{1}{4}t^2)$ روی یک صفحه‌ی مسطح واقع است و از آن صفحه خارج نمی‌شود. (راهنمایی: نشان دهید که صفحه‌ی بوسان در همه‌ی نقاط یکسان است.)

سوال ۷. انحنا منحنی $\mathbf{r}(t) = (t^2, \ln t, t \ln t)$ را در نقطه‌ی $(1, 0, 0)$ بیابید.

سوال ۸. در کدام نقطه روی منحنی
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = 3t \\ z = t^4 \end{cases}$$
 صفحه‌ی نرمال با صفحه‌ی $6x + 6y - 8z = 1$ موازی است؟

سوال ۹. معادله‌ی صفحه‌ی بوسان را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

$$P = (0, -1, 2\pi) \quad x = 2 \sin 2t \quad y = -\cos 2t \quad z = 4t \quad (1)$$

$$P = (0, 2, 1) \quad x = \ln t \quad y = 2t \quad z = t^2 \quad (2)$$

سوال ۱۰. با استفاده از تعریف حد نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4y^2x + 3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

سوال ۱۱. منحنی‌های تراز رویه‌ی $z = 4x^2 + y^2 + 1$ را رسم کنید.

سوال ۱۲. منحنی‌های تراز رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1} \quad (3)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \quad (4)$$

$$z = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1} \quad (5)$$

سوال ۱۳. سهمی وار $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ صفحه‌ی $x = 1$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادله‌ی خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(1, 2, 2)$ بیابید.

سوال ۱۴. بیضوی وار $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ صفحه‌ی $y = 2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی $(1, 2, 2)$ بیابید. وضعیت را در شکل نمایش دهید (رسم رویه، صفحه، محل تقاطع و خط مماس)

سوال ۱۵. منحنی‌های زیر روی رویه‌ی S واقع شده‌اند و از نقطه‌ی $(2, 1, 3)$ واقع بر آن رویه می‌گذرند.

$$\mathbf{r}_1(t) = (2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در نقطه‌ی $(2, 1, 3)$ بیابید.

سوال ۱۶. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌های زیر را در نقاط داده شده بیابید.

$$z = 2x^2 + y^2 - 5y \quad P = (1, 2, -4) \quad (6)$$

$$z = (x + 2)^2 - 2(y - 1)^2 - 5 \quad P = (2, 3, 3) \quad (7)$$

$$z = e^{x-y} \quad P = (2, 2, 1) \quad (8)$$

$$z = x \sin(x + y) \quad P = (-1, 1, 0) \quad (9)$$

$$z = \ln(x - 2y) \quad P = (3, 1, 0) \quad (10)$$

سوال ۱۷. در کدام نقطه روی رویه‌ی $z = 2x^2 + y^2 - 5y$ ، صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $-4x - y + 2z + 5 = 0$ است.