۱ جلسه‌ی نهم

یادآوری ۱. اگر $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری (منحنی فضایی) باشد به صورت زیر:

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

آنگاه

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

$$\mathbf{r}''(t) = (f''(t), g''(t), h''(t))$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) = (\int_a^b f(t), \int_a^b g(t), \int_a^b h(t))$$

۱.۱ قضیه‌ی اساسی حساب

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به زبان برداری:

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t)dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$$

مثال ۱. اگر $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 2t)$، آنگاه مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}(t)dt$ را بیابید.

پاسخ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}(t)dt = (2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t dt) = (2\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}}, -\cos t|_0^{\frac{\pi}{2}}, t^2|_0^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$(2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0, -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0, \frac{\pi^2}{4} - 0) = (2, 1, \frac{\pi^2}{4})$$

□

مثال ۲. بردار مماسِ واحد بر منحنی زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t, 1 + 3t, \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2t^2})$$

بردار مماس واحد را در $t = 2$ بیابید.

پاسخ. جهت بردار مماس بر منحنی در نقطه‌ی t :

$$\mathbf{r}'(t) = (۲t - ۲, ۳, t^۲ + t)$$

بردار مماسِ واحد بر منحنی:

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$T(۲) = \frac{\mathbf{r}'(۲)}{\|\mathbf{r}'(۲)\|}$$

$$\mathbf{r}'(۲) = (۲, ۳, ۶)$$

$$\|\mathbf{r}'(۲)\| = \sqrt{۴ + ۹ + ۳۶}$$

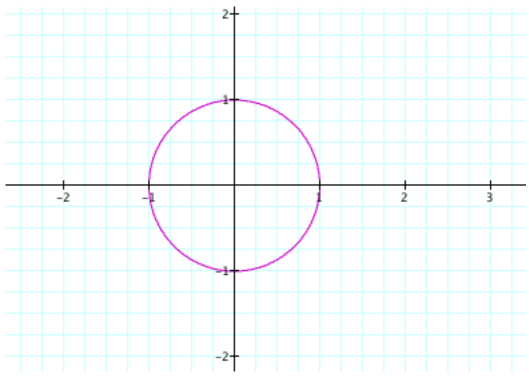
$$T(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۴۹}}(۲, ۳, ۶)$$

□

۲.۱ محاسبه‌ی طول یک منحنی فضائی

فرض کنید منحنیِ فضائیِ c توسط معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ داده شده باشد (که در آن f' ، g' و h' هر سه پیوسته هستند و منحنی تنها با یک بار رفتن t از a به b پیموده شده است.) مثلاً

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$$



یا در فضای دو بعدی

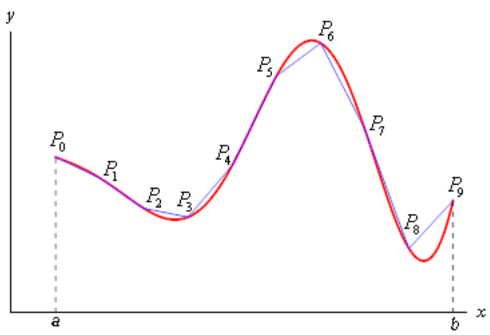
$$y = f(x)$$

به صورت برداری زیر:

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$$

برای محاسبه‌ی طول منحنی، آن را به n پاره‌خط تقسیم می‌کنیم. حاصلجمع طول این پاره‌خطها وقتی $n \to \infty$، برابر با طول منحنی خواهد شد. طول هر پاره‌خط وقتی n خیلی زیاد شود، یعنی وقتی فاصله‌ها خیلی کم شوند، برابر می‌شود با

$$\sqrt{dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}}$$



پس طول منحنی از نقطه‌ی a تا b برابر است با:

$$\sum_{x=a}^{b} \sqrt{dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}}$$

$$dx, dy, dz \to ۰$$

$$\text{طول منحنی} = \lim_{n\to\infty} \sum \text{طول} n \text{پاره خط}$$

$$\lim_{dx,dy,dz\to ۰} \sum_{x=a}^{b} \sqrt{dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}} = \int_a^b \sqrt{dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}}$$

از آنجا که داریم:

$$x = f(x)$$

$$dx = f'(t)dt, \quad dy = g'(t)dt, \quad dz = h'(t)dt$$

پس

$$\int_a^b \sqrt{(f'(t))^{۲}dt^{۲} + (g'(t))^{۲}dt^{۲} + (h'(t))^{۲}dt^{۲}} = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^{۲} + (g'(t))^{۲} + (h'(t))^{۲}}dt$$

به بیان دیگر طول منحنی $\mathbf{r}(t)$ از $t=a$ تا $t=b$ برابر است با

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|dt$$

مثال ۳. پیچار دایره‌ای $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را در نظر گرفته طول کمان آن را از نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ تا $(۱,۰,۲\pi)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$P=(۱,۰,۰)\to t=۰$$

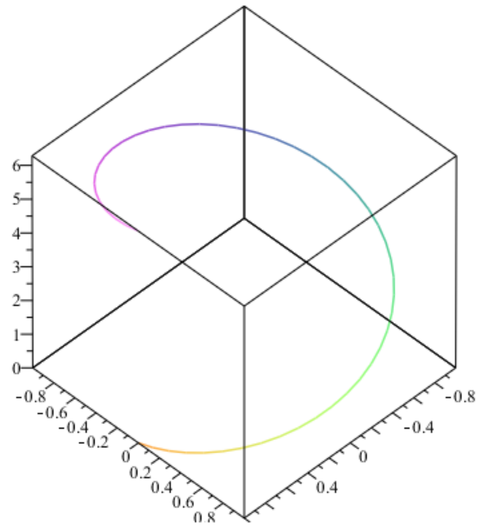
$$Q=(۱,۰,۲\pi)\to t=۲\pi$$

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,t)$$

$$\mathbf{r}'(t)=(-\sin t,\cos t,۱)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{\sin^۲ t+\cos^۲ t+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\int_۰^{۲\pi}\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۲}dt=\sqrt{۲}t|_۰^{۲\pi}=۲\sqrt{۲}\pi$$



$\square$

تمرین ۴. طول کمان دایره‌ی زیر را از $t=۰$ تا $t=\theta$ محاسبه کنید.

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t)$$

نتیجه را با فرمولِ محیط دایره مقایسه کنید.

منحنی مکعبیِ $\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$ را برای $۱ \leqslant t \leqslant ۲$ در نظر بگیرید. این منحنی را می‌توان با استفاده از تابع برداری زیر نیز پارامتربندی کرد و دقیقاً به همان شکل رسید.

$$\mathbf{r}_۲(u) = (e^u, e^{۲u}, e^{۳u}) \quad ۰ \leqslant u \leqslant \ln ۲$$

$$u = ۰ \rightarrow (۱, ۱, ۱)$$

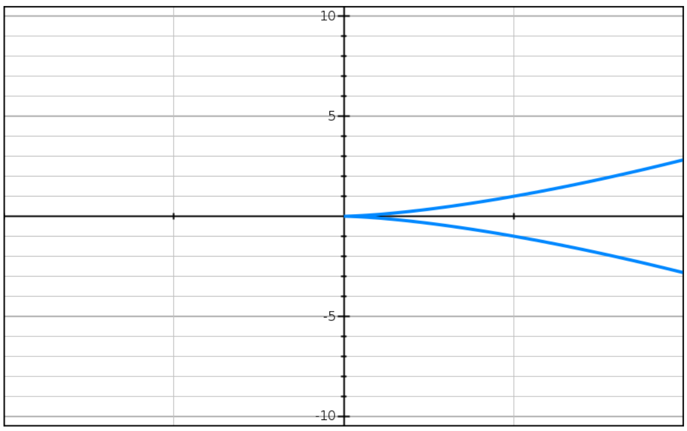
$$u = \ln ۲ \rightarrow (۲, ۴, ۸)$$

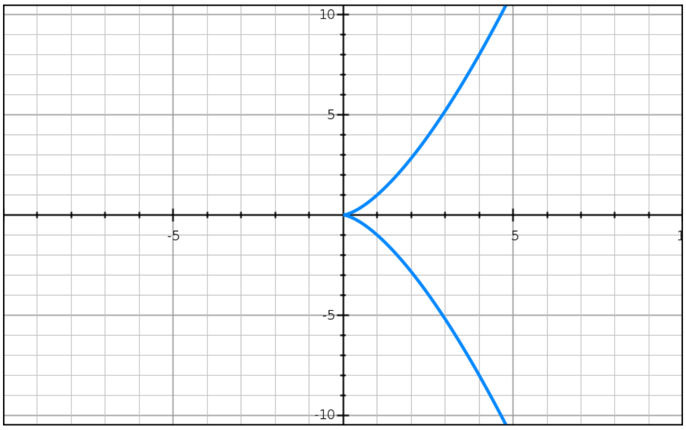
توجه ۵. طول منحنی وابسته به نحوه‌ی پارامتربندی آن نیست.

هدف ما در ادامه‌ی درس پارامتربندی منحنی بر حسب طول کمان آن است. یعنی یک نقطه‌ی P روی آن را در نظر می‌گیریم. سپس معادله‌ی برداریِ $r(s)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $r(s)$ نشان دهنده‌ی این باشد که وقتی به اندازه‌ی s روی منحنی از نقطه‌ی p حرکت می‌کنیم، در کجای منحنی واقع می‌شویم.

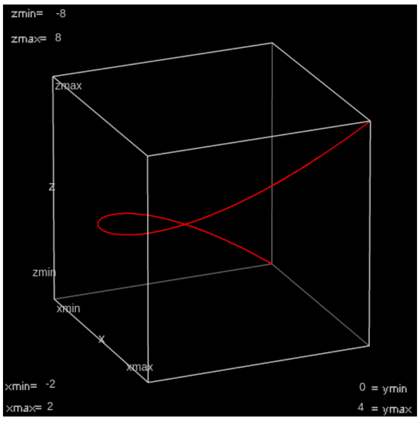
رفع چند اشکال

$$\mathbf{r}(t) = (t^۲, t^۳) \quad -۲ \leqslant t \leqslant ۲$$





$$\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$$



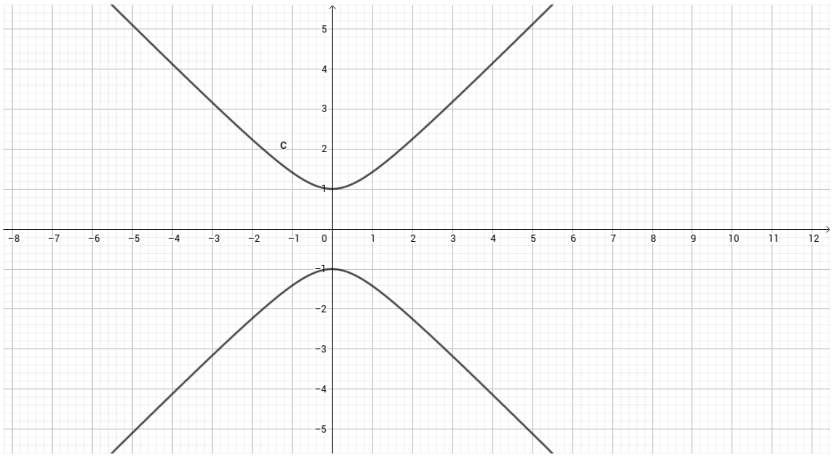
مثال ۶. دو رویه‌ی $z^۲ = x^۲ - y^۲ + ۱$ و $z^۲ = x^۲ - y^۲ - ۱$ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ. ۱.

$$z^۲ = x^۲ - y^۲ + ۱$$

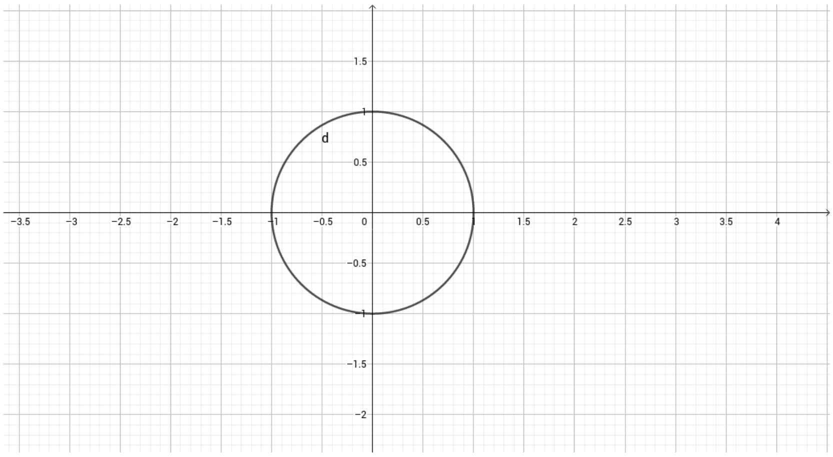
تصویر در صفحه‌ی $z = ۰$:

$$x^۲ - y^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۱$$



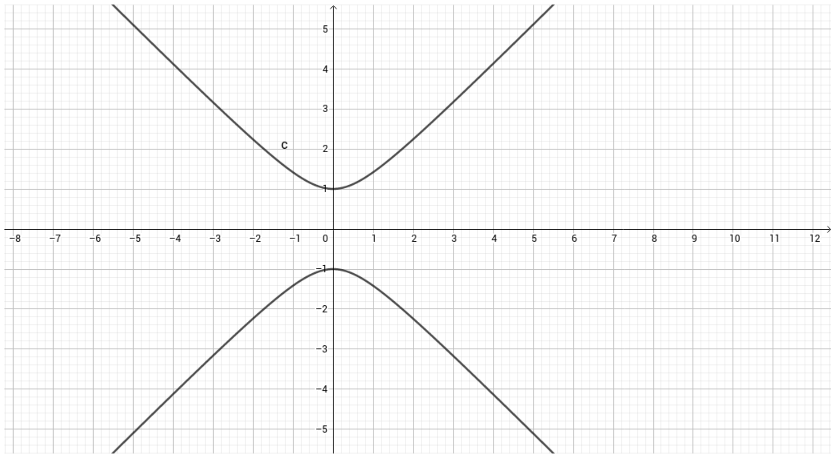
تصویر در صفحه‌ی $x = ۰$:

$$z^۲ + y^۲ = ۱$$

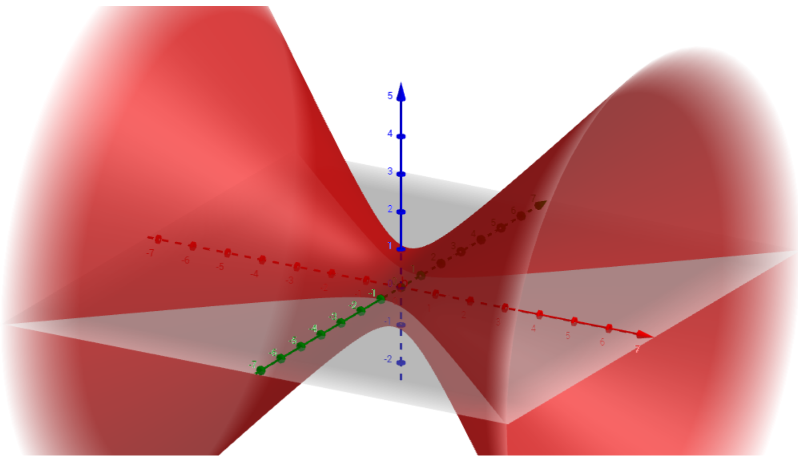


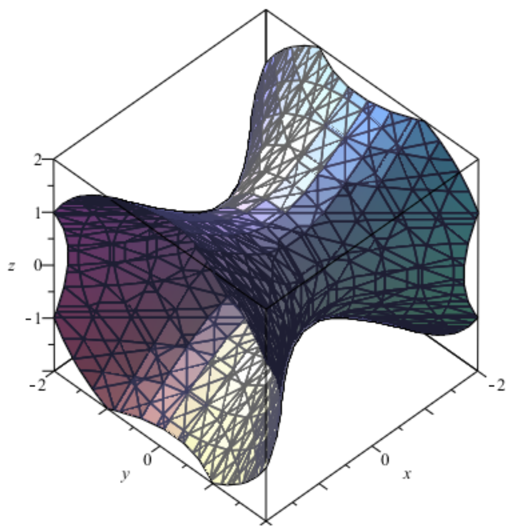
تصویر در صفحه‌ی $y = ۰$:

$$z^۲ - x^۲ = ۱$$



شکل نهایی:



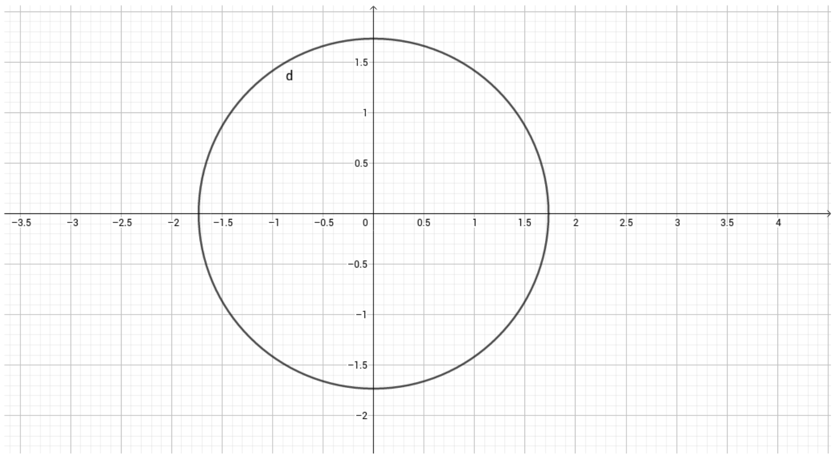


.۲

$$z^{۲} = x^{۲} - y^{۲} - ۱$$

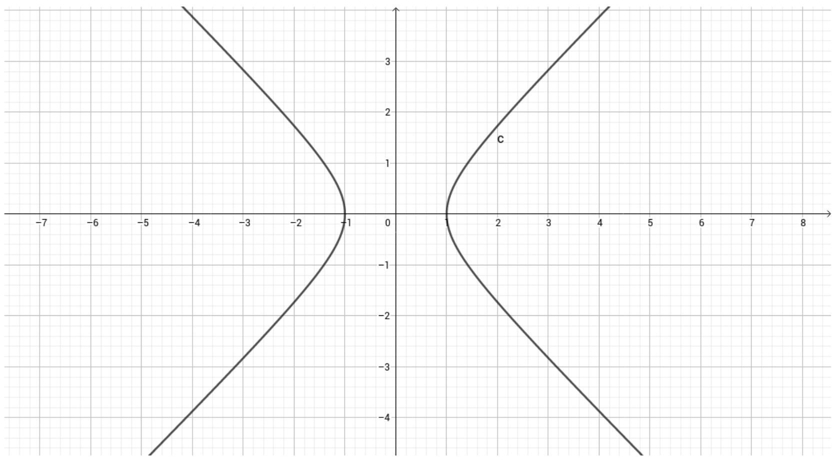
در صفحه‌ی $x = ۰$: $z^{۲} + y^{۲} = -۱$ پس در این صفحه شکلی نیست. یعنی شکل نهائی با صفحه‌ی $x = ۰$ اشتراکی نخواهد داشت. پس بخشی از شکل خالی خواهد بود.

در صفحه‌ی $x = ۲$: $z^{۲} + y^{۲} = ۳$

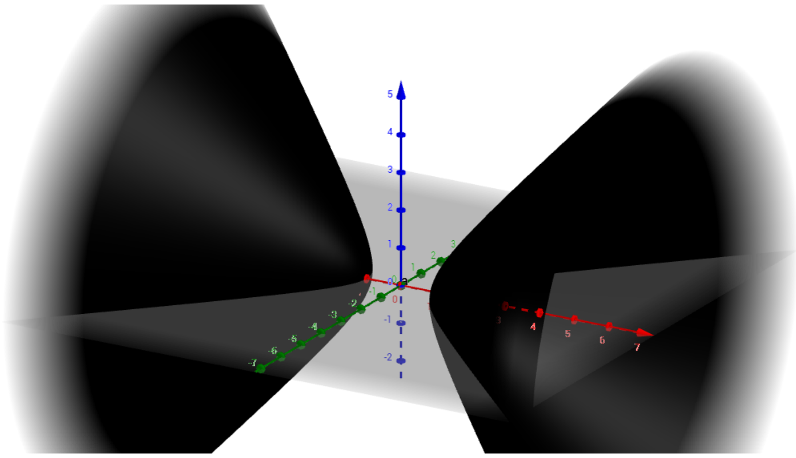


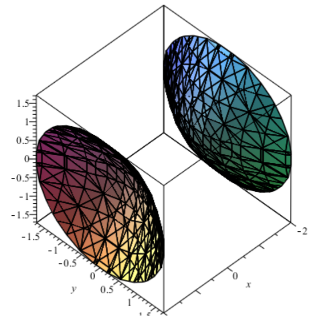
در صفحه‌ی $z = ۰$:

$$x^{۲} - y^{۲} = ۱$$

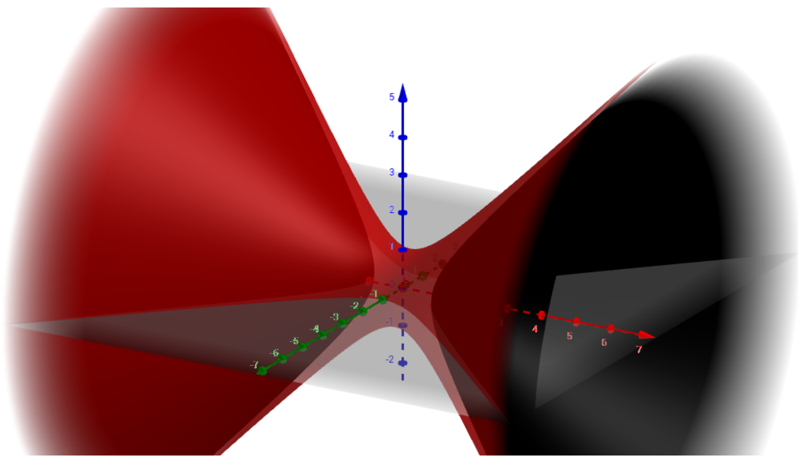


شکل نهایی:





مقایسه‌ی دو شکل با هم (یکی با رنگ قرمز و دیگری با رنگ مشکی)

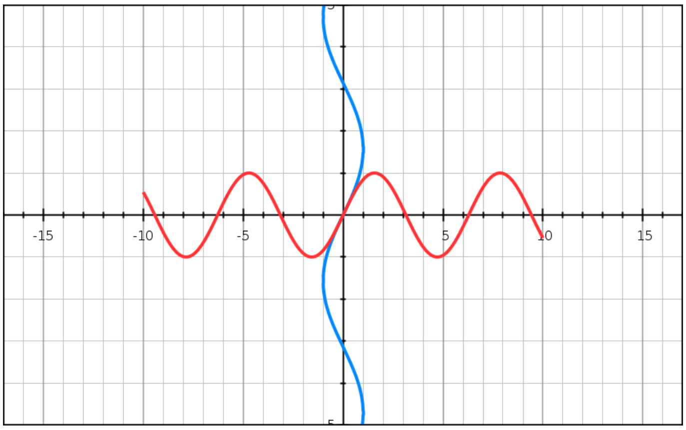


□

مقایسه‌ی دو منحنی $\mathbf{r}(t)=(\sin t,t)$ و $\mathbf{r}(t)=(t,\sin t)$:

منحنی آبی رنگ $\mathbf{r}(t)=(\sin t,t)$

منحنی قرمز رنگ $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$



نمودارهای این قسمت با استفاده از دو تارنمای زیر کشیده شده‌اند.

https://www.geogebra.org/classic/2d

https://www.geogebra.org/classic/3d