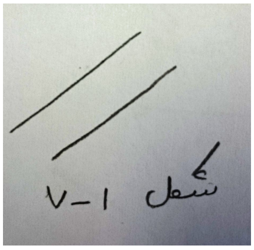
۱ جلسه‌ی هفتم

پیش از شروع درس دو تمرینِ‌مربوط به بحثهای پیشین را حل می‌کنیم.

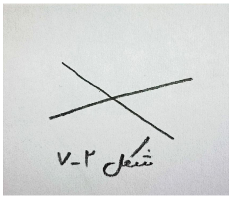
مثال ۱. فاصله‌ی بینِ دو خطِ متنافرِ زیر را بیابید.

$$L_۱ : \begin{cases} x = ۱ + t \\ y = -۲ + ۳t \\ z = ۴ - t \end{cases} \quad L_۲ : \begin{cases} x = ۲s \\ y = ۳ + s \\ z = -۳ + ۴s \end{cases}$$

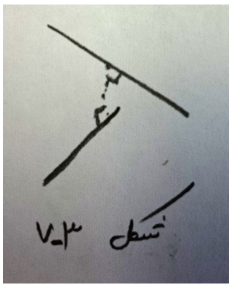
توجه. دو خط در $\mathbb{R}^۳$ یا موازیند:



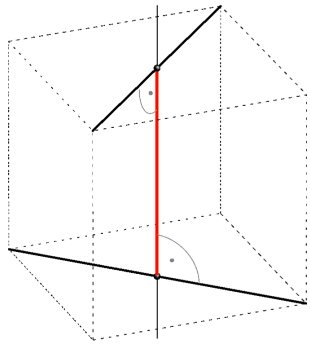
یا متقاطعند:



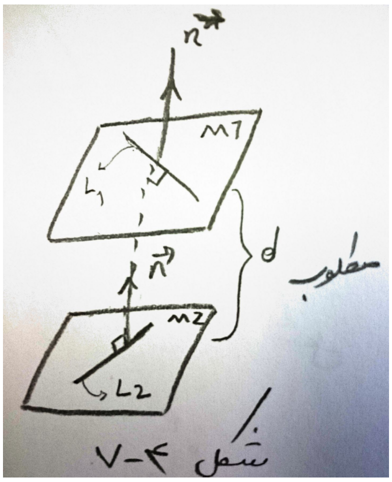
یا متنافر:



منظور از دو خطِ متنافر، دو خطی هستند که روی دو صفحه‌ی موازی با هم واقع شده‌اند و این دو خط نه همدیگر را قطع می‌کنند و نه با هم موازیند؛ مانند دو خط مشکی در شکل زیر:



پاسخ. کافی است دو صفحه‌ی موازی پیدا کنیم، یکی شامل L_1 و دیگری شامل L_2، و سپس فاصله‌ی بین این دو صفحه را بیابیم.



کافی است فاصله‌ی یک نقطه روی صفحه‌ی M_2 را تا صفحه‌ی M_1 محاسبه کنیم.

بدست آوردن معادله‌ی صفحه‌ی M_1 :

به یک نقطه روی صفحه و یک بردار عمود بر آن نیازمندیم.

اگر $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه باشد آنگاه $\mathbf{n}$ بر خط L_1 عمود است. به همین ترتیب $\mathbf{n}$ بر بر خط L_2

نیز عمود است.

پس بردار $\mathbf{n}$ می‌تواند بردار زیر باشد.

$$\mathbf{n} = \overset{L_1\text{بردار خط}}{\mathbf{a}} \times \overset{L_2\text{بردار خط}}{\mathbf{b}}$$

بردار خط L_1 : $(1, 3, -1)$

بردار خط L_2 : $(2, 1, 4)$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (a, b, c) = (13, -6, -5)$$

یک نقطه روی خط L_1 (یعنی روی صفحه‌ی M_1) در $t = 0$: $(1, -2, 4)$

معادله‌ی صفحه‌ی M_1:

$$13x - 6y - 5z = 13(1) - 6(-2) - 5(4) = 5$$

یک نقطه روی صفحه‌ی M_2: کافی است یک نقطه روی خطِ L_2 پیدا کنیم:

$$s = 0 \Rightarrow (2, 3, -3)$$

حال کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی فوق را از صفحه‌ی M_1 محاسبه کنیم. فرمولِ محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) از صفحه‌ی $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

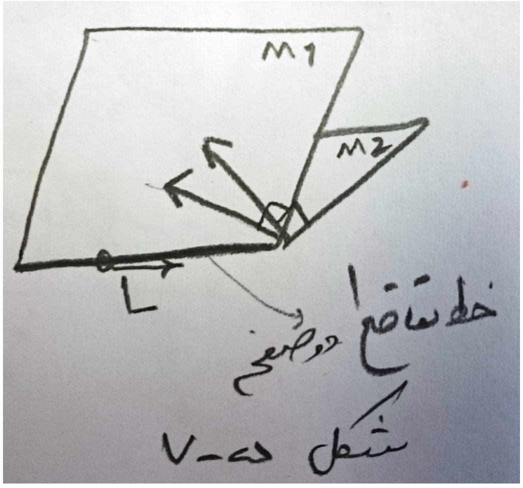
پس فاصله‌ی بین دو خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{|13(2) - 6(3) - 5(-3) - 5|}{\sqrt{13^2 + 6^2 + 5^2}}$$

□

مثال ۲. معادله‌ی خطی را بیابید که محل تقاطع دو صفحه‌ی زیر است:

$$\begin{cases} M_1 : 2x + 3y + 4z = 5 \\ M_2 : 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$



پاسخ. برای بدست آوردن معادله‌ی یک خط کافی است یک نقطه از آن و بردار جهت آن را بیابیم. معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) بگذرد و همجهت با بردارِ (a, b, c) باشد به صورت زیر است:

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$

از آنجا که خط هم روی صفحه‌ی M_1 است و هم روی صفحه‌ی M_2، هم بردار صفحه‌ی M_1 و هم بردار صفحه‌ی M_2 بر آن عمودند. پس جهت خط توسط ضرب خارجی این دو بردار تعیین می‌شود که آنها را با $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ نشان می‌دهیم.

بردار خط: $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$

بردار خط:

$(2, 3, 4) \times (2, 3, -1) = (-15, +10, 0)$.

حال که جهت خط را می‌دانیم کافی است نقطه‌ای روی آن پیدا کنیم. برای این کار کافی است بدانیم در $x = 0$ بقیه‌ی مختصات نقطه چگونه به دست می‌آید. در معادله‌ی هر دو صفحه، x را برابر صفر می‌گیریم تا به دو معادله‌ی زیر با دو مجهول برسیم:

$$3y + 4z = 5 \quad 3y - z = 5 \Rightarrow z = 0, y = \frac{5}{3}$$

با حل این معادله به نقطه‌ی مورد نظر می‌رسیم. کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقطه‌ی $(0, \frac{5}{3}, 0)$ می‌گذرد و موازی بردارِ $(-15, 10, 0)$ است:

$$x = 0 - 15t \quad y = \frac{5}{3} + 10t \quad z = 0 + 0t = 0$$

□

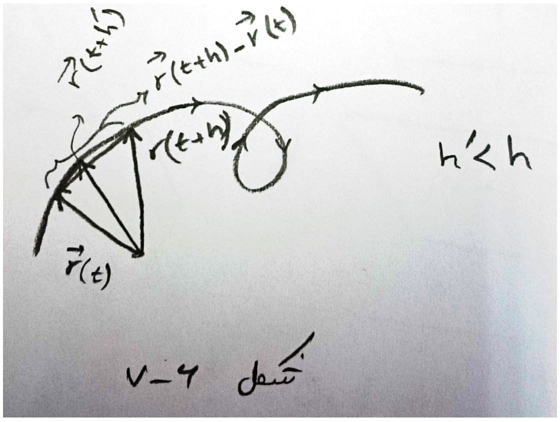
۱.۱ مشتق توابع برداری

فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری باشد:

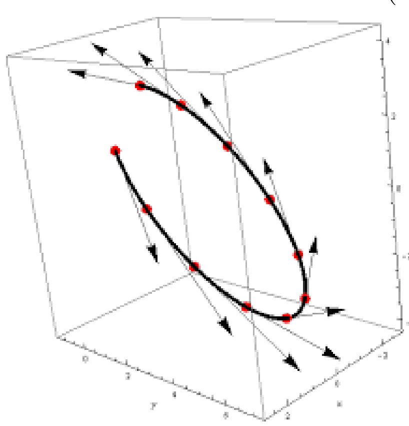
$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

مشتق $\mathbf{r}(t)$ در لحظه‌ی t با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to ۰} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$



توجه ۳. $\mathbf{r}'(t)$ در هر لحظه‌ی t بر منحنی $\mathbf{r}(t)$ مماس است. یعنی $\mathbf{r}'(t)$ بردار مماسِ همجهت با $\mathbf{r}(t)$ است:



توجه ۴. اگر $\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ آنگاه

$$\mathbf{r}'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(t+h),g(t+h),h(t+h))-(f(t),g(t),h(t))}{h}$$

$$=(f'(t),g'(t),h'(t))$$

مثال ۵. مشتق تابع برداری $\mathbf{r}(t)=(۱+t^{۳})\mathbf{i}+te^{-t}\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$ را در نقطه‌ی t بیابید.

پاسخ.

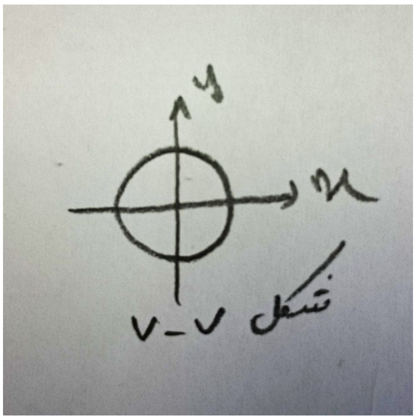
$$\mathbf{r}'(t)=(۳t^{۲},e^{-t}-e^{-t}t,\cos t)$$

□

مثال ۶. معادله‌ی خط مماس بر پیچار به معادله‌ی زیر را در نقطه‌ی $(۰,۱,\frac{\pi}{۲})$ بیابید.

$$\begin{cases} x=۲\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$$

پاسخ. در فضای دو بُعدی منحنی فضایی $(۲\cos t,\sin t)$ را رسم کنید.



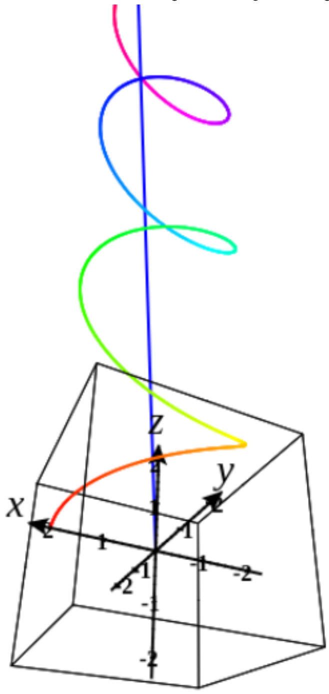
توجیه دوم:

$$x(t)=۲\cos t\Rightarrow x^{۲}=۴\cos^{۲}t$$

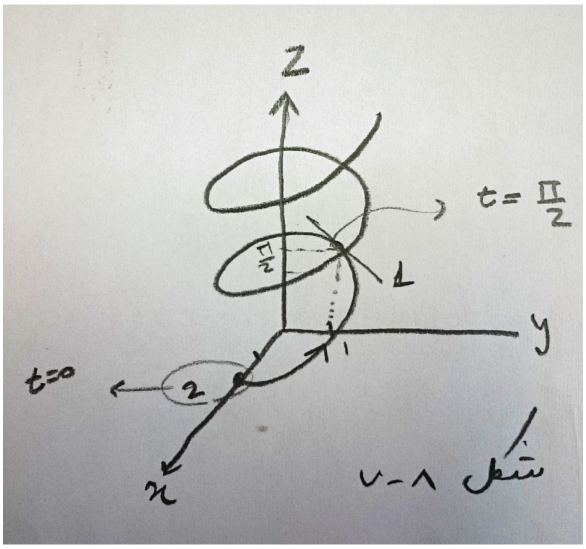
$$y(t)=\sin t\Rightarrow y^{۲}=\sin^{۲}t$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۴} + y^۲ = ۱$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک بیضی است که در محورِ x از ۲− تا ۲ کشیده می‌شود و در محورِ y از ۱− تا ۱. پیچار مورد نظر به صورت زیر است:



نیازمند یک نقطه روی خط و یک بردار جهت برای خط مورد نظر هستیم.



$$t = ۰ \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۰ \\ z = ۰ \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{۲} \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱ \\ z = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

از آنجا که خط L در نقطه‌ی $(۰, ۱, \frac{\pi}{۲})$ بر منحنی مماس است، جهت این خط با بردار زیر تعیین می‌شود.

$$\mathbf{r}'(t) = (-۲\sin(\frac{\pi}{۲}), \cos(\frac{\pi}{۲}), ۱) = \underbrace{(-۲, ۰, ۱)}_{\text{جهت خط}}$$

نقطه نیز در سوال داده شده است. در نتیجه معادله‌ی خط برابر است با:

$$\frac{x - ۰}{۲} = \frac{z - \frac{\pi}{۲}}{۱}, y = ۱$$

معادله‌ی پارامتری خط برابر است با:

$$\begin{cases} x = ۰ + t(-۲) \\ y = ۱ + t(۰) \\ z = \frac{\pi}{۲} + t(۱) \end{cases}$$

□

توجه ۷. مشتق دوم هم به طور مشابه تعریف می شود.

$$\mathbf{r}''(t) = (f''(t), g''(t), h''(t))$$

قضیه ۸.

- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

- $$\frac{d}{dt} \overset{\text{عدد}}{c}\ \mathbf{u}(t) = c\mathbf{u}'(t)$$

- $$\frac{d}{dt}(\overset{\text{تابع عددی}}{f(t)} \quad \overset{\text{تابع برداری}}{\mathbf{u}(t)}) = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \overset{\text{ضرب داخلی}}{\cdot} \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

- $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \overset{\text{ضرب خارجی}}{\times} \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

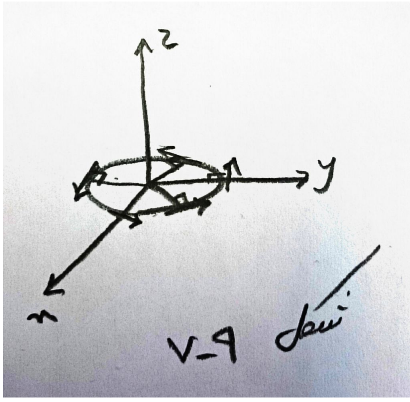
- $$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(f(t)) = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$

مثال ۹. فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری باشد بطوریکه

$$\forall t \quad \|\mathbf{r}(t)\| = c$$

یعنی طول بردار مکان در همه‌ی لحظات ثابت باشد. نشان دهید که بردار مماسِ $\mathbf{r}'(t)$ در هر لحظه‌ی t بر بردار مکانِ $\mathbf{r}(t)$ عمود است.

پاسخ.



$$\|\mathbf{r}(t)\|^۲ = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^۲$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲$$

بنابراین از رابطه‌ی $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$ مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$$

با حل معادله‌ی فوق داریم:

$$۲\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰ \Rightarrow \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰$$

پس نتیجه می‌گیریم که بردار جهت $\mathbf{r}(t)$ بر $\mathbf{r}'(t)$ عمود است. □

تعریف ۱۰. اگر $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ آنگاه انتگرال تابع برداری به صورت زیر است.

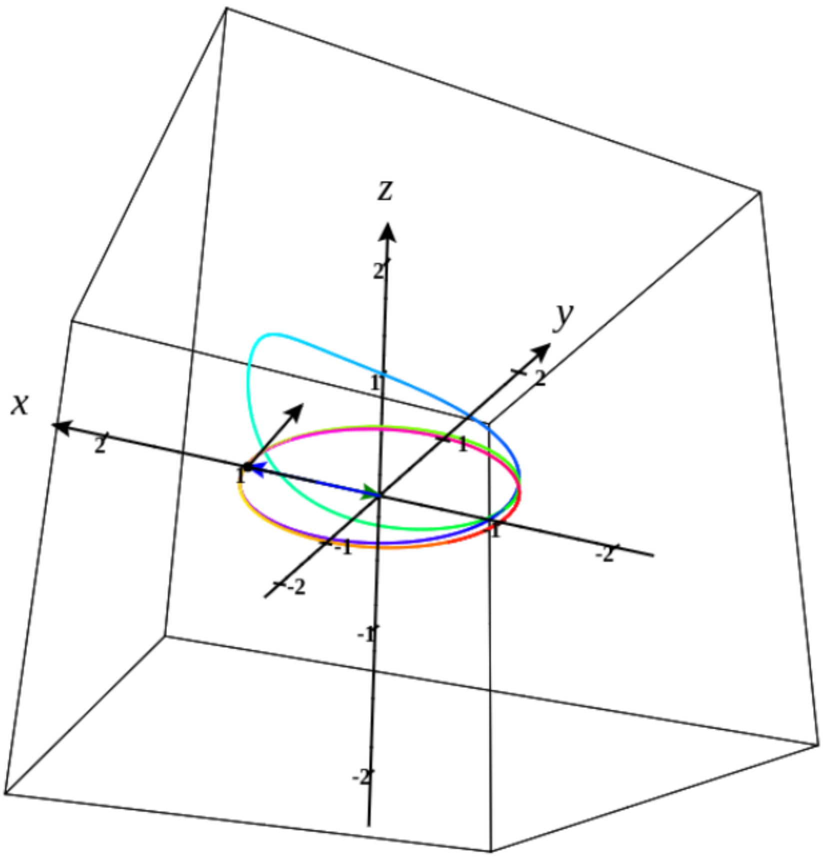
$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = (\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt)$$

توجه ۱۱. در تارنمای زیر نیز می‌توانید منحنی‌های فضائی دلخواه خود را رسم کنید:

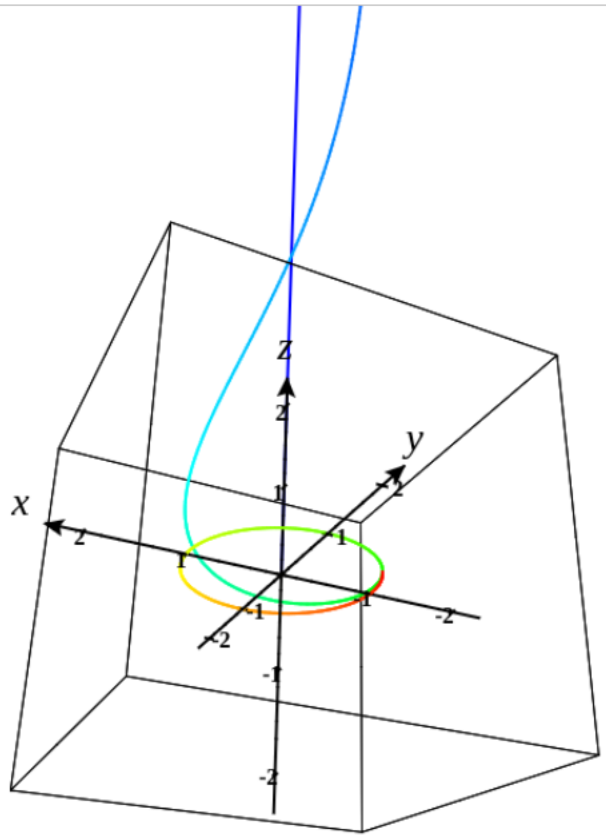
http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/

رفع یک اشکال در کلاس درس امروز

امروز در کلاس درباره‌ی مقایسه‌ی دو منحنی فضائیِ $(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{1+t^2})$ و $(\cos(t), \sin(t), e^t)$ بحث کردیم. دقت کنید که در اولی برای مقادیرِ بزرگترِ t همواره دایره‌های پایینتری به صورت نزدیک به هم کشیده می‌شوند. چون مقادیر z به هم نزدیک می‌شوند. همچنین مقدارِ z همیشه کمتر از ۱ است و منحنی از ۱ بالاتر نمی‌رود. یعنی در $t = 0$ ما در بالای منحنی هستیم که ارتفاع آن برابر با ۱ است و هر چه t بزرگتر شود پایینتر می‌رویم. شکل منحنیِ فضائی یادشده به صورت زیر است:



اما از طرفی در منحنیِ $(\cos t, \sin t, e^t)$ مقدارِ z به صورت نمائی زیاد می‌شود و منحنی به سمت بالا تا بی‌نهایت در حرکت است. توجه کنید که مثلا $\frac{1}{e^{10}} = e^{-10}$ و e^{-20} هر دو بسیار کوچک و نزدیک به صفرند ولی e^{1} و e^{10} فاصله‌ی بسیار زیادی از هم دارند. منحنی یادشده به صورت زیر است:


z
2
1
-1
-2
x
2
1
-1
-2
y
2
1
-1
-2