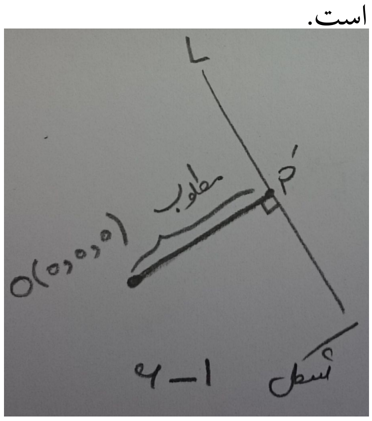
۱ جلسه‌ی ششم

مثال ۱. فاصله‌ی مبدأ را تا خط

$$\begin{cases} x = ۱ + t \\ y = ۲ - t \\ z = -۱ + ۲t \end{cases}$$

را بیابید.

پاسخ. توجه کنید که خط یادشده از نقطه‌ی $(۱, ۲, -۱)$ می‌گذرد و با بردار $(۱, -۱, ۲)$ موازی است.



فرض کنیم از مبدأ خطی عمود به خط مورد نظر بکشیم که آن را در P' قطع کند.

$$P' = (x, y, z) \quad , \quad O = (۰, ۰, ۰)$$

می‌خواهیم بردار OP' بر خط عمود باشد. پس باید حاصلضرب داخلی OP' و بردارِ جهتِ خط صفر شود.

$$(x, y, z) \cdot (۱, -۱, ۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad x - y + ۲z = ۰$$

از طرفی نقطه‌ی P' روی خطِ L واقع است. پس باید در معادله‌ی خط صدق کند. پارامترهای خطِ L را در معادله‌ی $x - y + ۲z = ۰$ قرار می‌دهیم.

$$۱ + t - ۲ + t - ۲ + ۴t = ۰ \quad \Rightarrow \quad t = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه در $t = \frac{۱}{۲}$ به نقطه‌ی P' می‌رسیم.

$$\begin{cases} x = ۱ + t = \frac{۳}{۲} \\ y = ۲ - t = \frac{۳}{۲} \\ z = -۱ + ۲t = ۰ \end{cases}$$

پس نقطه‌ی P' برابر است با $(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}, ۰)$ و فاصله‌ی مبدأ تا خط برابر است با طول $\mathbf{OP'}$ که می‌شود:

$$\sqrt{(\frac{۳}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ + ۰} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

$\square$

۲ توابع برداری و منحنی‌های فضایی

در این درس به تابعی تابع برداری گفته می‌شود که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{R}^۳$ باشد.

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۳$$

$$t \mapsto (f(t), g(t), h(t))$$

توجه ۲.

$$\underbrace{f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}_{\text{به اینها توابع مختصات تابع برداریِ } \mathbf{r} \text{ گفته می‌شود.}}$$

می‌توان $\mathbf{r}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

مثال ۳. $\mathbf{r}(t) = (۱ + t)\mathbf{i} + (۲ - t)\mathbf{j} + (-۱ + ۲t)\mathbf{k}$ یک تابع برداری است.

$$\text{یک خط راست} \begin{cases} x(t) = ۱ + t \\ y(t) = ۱ - t \\ z(t) = -۱ + ۲t \end{cases}$$

مثال ۴. دامنه‌ی تابعِ برداری زیر را بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = (t^{۳}, \ln(۳ - t), \sqrt{t})$$

پاسخ. برای معنی داشتن $\sqrt{t}$ باید داشته باشیم: $t \geqslant ۰$

در دامنه‌ی $\ln(۳ - t)$ باید داشته باشیم: $۳ - t > ۰$

پس $t \in [۰, ۳)$ دامنه‌ی مورد نظر ماست. □

تعریف ۵ (حد توابع برداری)**.** اگر $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ آنگاه، تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = (\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t))$$

در صورتی‌که $\lim_{t\to a} f(t)$، $\lim_{t\to a} g(t)$ و $\lim_{t\to a} h(t)$ هر سه موجود باشند. توجه کنید که عبارت

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = (b_۱, b_۲, b_۳)$$

یعنی این که فاصله‌ی بردارِ $\mathbf{r}(t)$ از نقطه‌ی $(b_۱, b_۲, b_۳)$ را می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه کم کرد، به شرط این که t به اندازه‌ی کافی به a نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = (b_۱, b_۲, b_۳) \Leftrightarrow \forall \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \forall t \quad (|t-a| < \delta \to \|\mathbf{r}(t)-(b_۱, b_۲, b_۳)\| < \epsilon).$$

مثال ۶. اگر $\mathbf{r}(t) = (۱ - t^{۳})\mathbf{i} + (te^{-t})\mathbf{j} + (\frac{\sin t}{t})\mathbf{k}$ آنگاه حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{t\to ۰} \mathbf{r}(t)$$

پاسخ.

$$\lim_{t\to ۰} ۱ + t^{۳} = ۱, \lim_{t\to ۰} te^{-t} = ۰, \lim_{t\to ۰} \frac{\sin t}{t} = ۱ \Rightarrow \lim_{t\to ۰} \mathbf{r}(t) = (۱, ۰, ۱)$$

□

تعریف ۷ (پیوستگی)**.** می‌گوییم تابع برداری $\mathbf{r}$ در نقطه‌ی a پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

پس $\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ در نقطه‌ی a پیوسته است اگر و تنها اگر f، g و h در نقطه‌ی a پیوسته باشند.

تعریف ۸ (منحنی‌های فضائی). فرض کنید توابع $\begin{cases} f:I\to\mathbb{R} \\ g:I\to\mathbb{R} \\ h:I\to\mathbb{R}\end{cases}$ توابعی حقیقی و پیوسته روی بازه‌ی $I\subseteq\mathbb{R}$ باشند قرار دهید

$$C=\{(f(t),g(t),h(t))|t\in I\}$$

به C یک **منحنی فضائی** می‌گوییم.

منحنی‌های فضائی می‌توانند مسطح (یعنی واقع در یک صفحه) باشند؛ مانند خطها.

مثال ۹. منحنی فضایی ساخته شده توسط معادلات پارامتری زیر را تحلیل کنید.

$$\begin{cases} x=۱+t \\ y=۲+۵t \\ z=-۱+۶t\end{cases}$$

پاسخ. معادلات بالا نشانگر خط به دست آمده از نقطه‌ی زیر و بردار جهت زیر هستند.

$$(۱,۲,-۱)\text{نقطه}$$

$$(۱,۵,۶)\text{بردار}$$

□

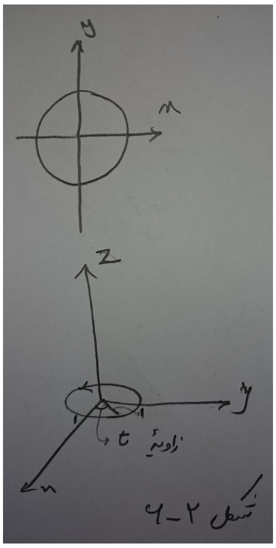
به طور کلی رسم همه‌ی منحنی‌های فضائی آسان نیست. در ادامه برخی منحنی‌های فضائی را تحلیل کرده‌ایم و نمودار آنها را با استفاده از نرم‌افزار میپل رسم کرده‌ایم.

مثال ۱۰. منحنی فضائی معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

پاسخ. نخست ابتدا منحنی مسطح دو بعدی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ را در نظر بگیرید. این منحنی همان دایره‌ی مثلثاتی است که با حرکتِ t از ۰ تا ۲π در جهت عکس عقربه‌های ساعت کشیده می‌شود. یه بیان دیگر از آنجا که $\sin^۲(t) + \cos^۲(t) = ۱$ منحنیِ $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ یک دایره است.

$$x = \cos t, y = \sin t \quad x^۲ + y^۲ = \cos^۲ t + \sin^۲ t = ۱$$

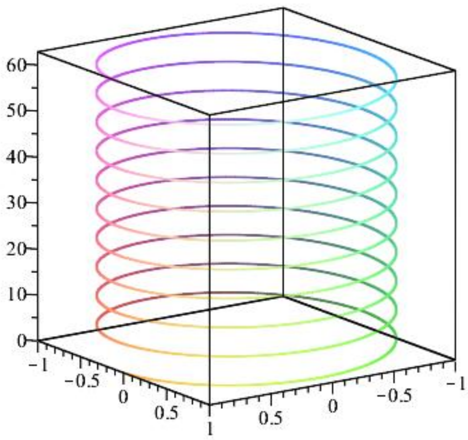


پس تصویرِ منحنی $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ روی صفحه‌ی $z = ۰$ یک دایره با شعاع یک است. پس منحنی $\mathbf{r}(t)$ هر چه باشد روی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ واقع است. حال دقت کنید که مؤلفه‌ی z با زمانِ t زیادتر می‌شود و با خود دایره را به سمت بالا می‌کشاند.

به شکل حاصل از معادله‌ی بالا، یک مارپیچ، یا یک پیچار گفته می‌شود.[۱]

[۱] helix

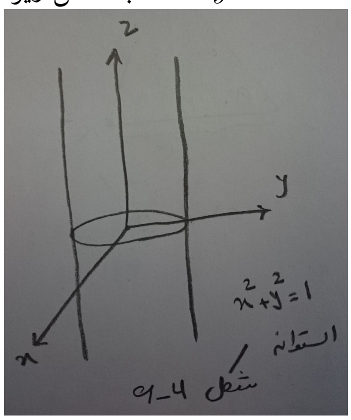
```
> spacecurve([cos(t), sin(t), t], t = 0 .. 20*Pi, numpoints = 1000)
```

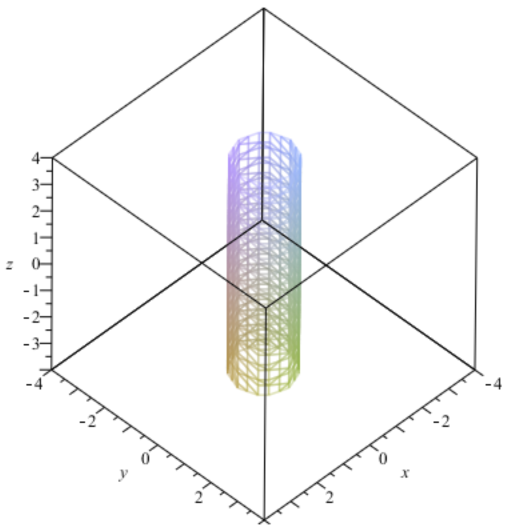


□

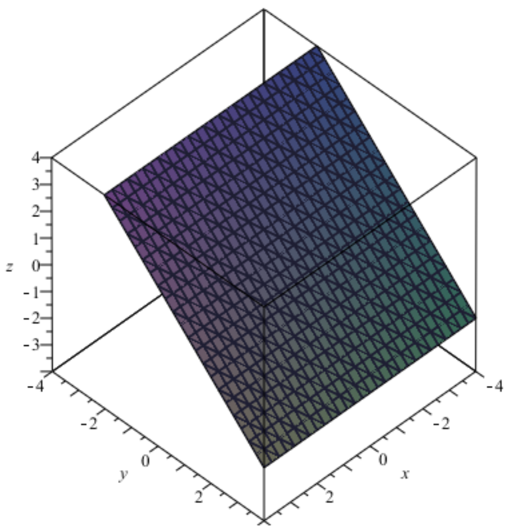
مثال ۱۱. منحنی فضائی محل تقاطع استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ با صفحه‌ی $y + z = ۲$ را بیابید.

پاسخ. استوانه‌ی
$x^{۲} + y^{۲} = ۱$ به شکل زیر است:

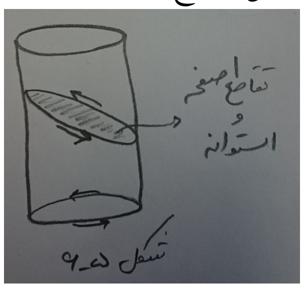


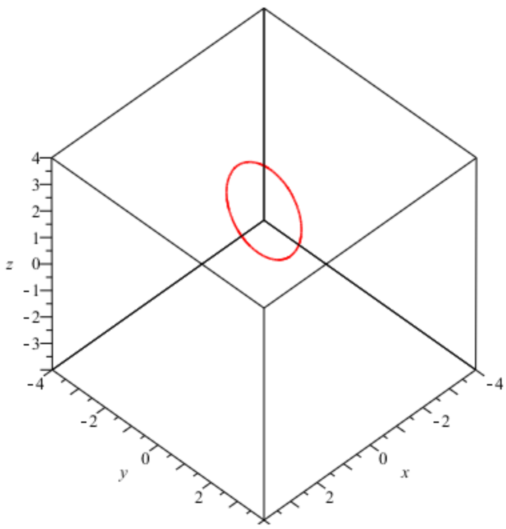


صفحه‌ی مورد نظر را نیز می‌توان با مشخص کردن سه نقطه از آن رسم کرد:



محل تقاطع استوانه با صفحه یک بیضی است.





برای بدست آوردن معادله‌ی بیضی، سه پارامتر $x(t), y(t), z(t)$ را می خواهیم.
تصویر بیضی روی صفحه‌ی xy برابر است با

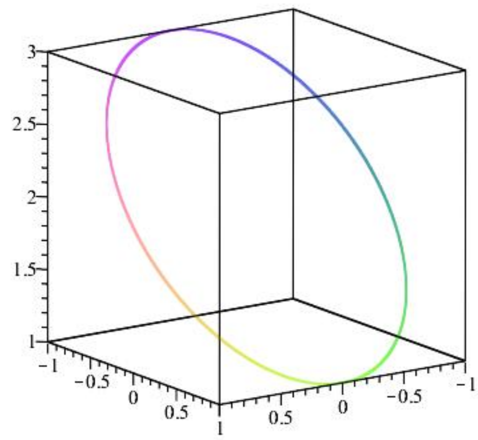
$$x^۲ + y^۲ = ۱$$

پس تصویر مورد نظر با معادله‌ی پارامتری زیر مشخص می‌شود:

$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$$

از آنجا که بیضی مورد نظر روی صفحه‌ی ۲ $= y + z$ واقع است، مؤلفه‌ی z برابر است با $z(t) = ۲ - \sin t$.

```
> spacecurve([cos(t), sin(t), 2-sin(t)], t = 0 .. 2*Pi, numpoints = 1000)
```



□

مثال ۱۲. منحنی فضائی به معادله‌ی مقابل را در نظر بگیرید:

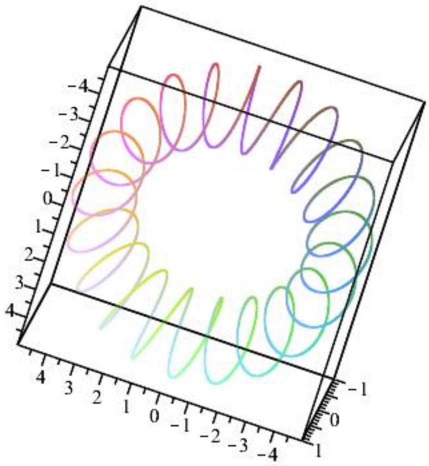
$$\begin{cases} x = (۴ + \sin(۲۰t))\cos t \\ y = (۴ + \sin(۲۰t))\sin t \\ z = \cos(۲۰t) \end{cases}$$

پاسخ. به این منحنی یک مارپیچ چنبره‌ای می‌گوئیم، زیرا روی یک چنبره (به شکل دونات) به صورت مارپیچ حرکت می‌کند. [۲]

---

[۲] Toroidal spiral

```
> spacecurve([(4+sin(20*t))*cos(t), (4+sin(20*t))*sin(t), cos(20*t)],
t = 0 .. 2*Pi, numpoints = 1000)
```

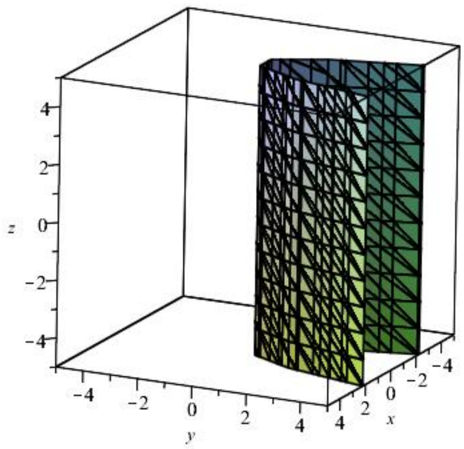


□

مثال ۱۳. منحنی فضائی به معادله‌ی $\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$ را رسم کنید.

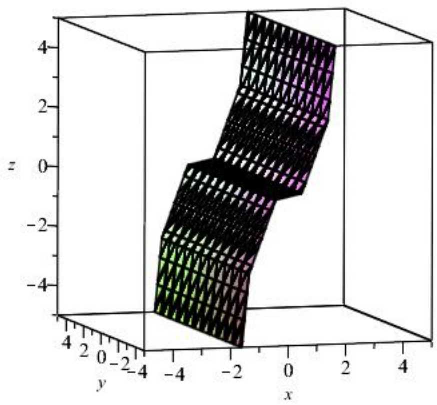
پاسخ. دقت کنید که مؤلفه‌های x, y روی استوانه‌ی سهموی $y = x^۲$ واقعند.

$> implicitplot۳d(y = x^۲, x = -۵..۵, y = -۵..۵, z = -۵..۵,$
$scaling = constrained, numpoints = ۱۰۰۰)$



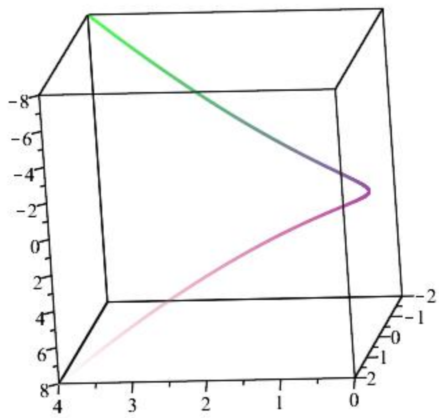
از طرفی مؤلفه‌های x, z بر روی یک استوانه به معادله‌ی $z = x^۳$ واقعند:

$implicitplot۳d(z = x^۳, x = -۵..۵, y = -۵..۵, z = -۵..۵,$
$scaling = constrained, numpoints = ۱۰۰۰)$



از تقاطع ایندو شکل زیر حاصل می‌شود (منحنی مکعبی خم شده) [۳]

$$> spacecurve([t, t^۲, t^۳], t = -۲..۲, numpoints = ۱۰۰۰)$$



$\square$

مثال ۱۴. $(t\cos t, t, t\sin t)$ را رسم کنید.

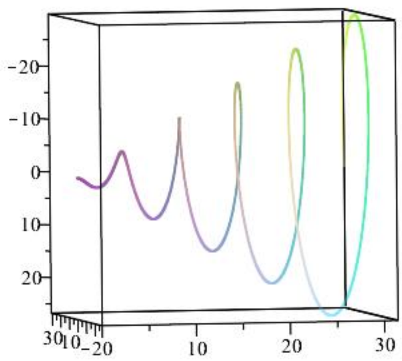
پاسخ. به رابطه‌ی بین x, z دقت کنید:

$$x^۲ + z^۲ = t^۲(۱) = t^۲$$

[۳] twisted cubic

پس منحنی مورد نظر روی یک مخروط واقع است.

$> spacecurve([t*cos(t), t, t*sin(t)], t = ۰..۱۰*Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$



$\square$

مثال ۱۵. ابتدا منحنی دو بعدی $(\cos t, \cos ۲t)$ ، سپس منحنی فضائی $(\cos t, \sin t, \cos ۲t)$ را رسم کنید.

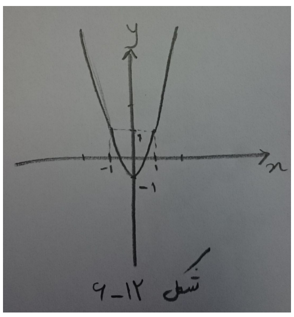
پاسخ. منحنی $(\cos t, \cos ۲t)$:

$$x = \cos t, y = \cos ۲t$$

$$\cos ۲t = \cos^۲ t - \sin^۲ t = ۲\cos^۲ t - ۱$$

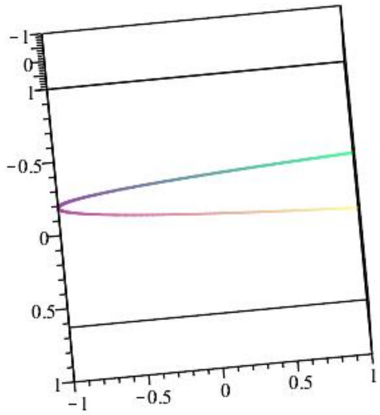
در نتیجه داریم:

$$y = ۲x^۲ - ۱$$



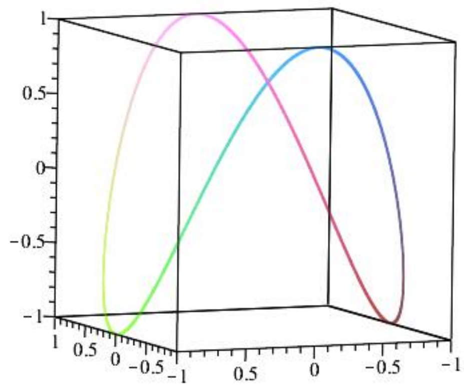
منحنی $(\cos t, \cos ۲t, ۰)$:

$> spacecurve([cos(t), cos(۲ * t), ۰], t = ۰..۲ * Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$



منحنی $(\cos t, \sin t, \cos ۲t)$:

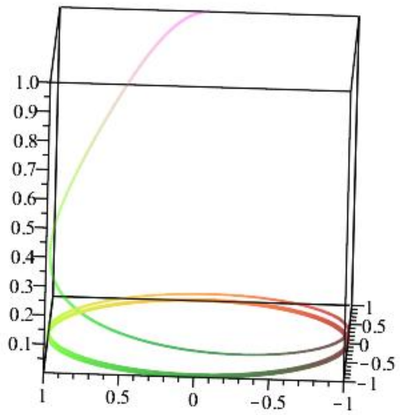
$> spacecurve([cos(t), sin(t), cos(۲ * t)], t = ۰..۲ * Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$



$\square$

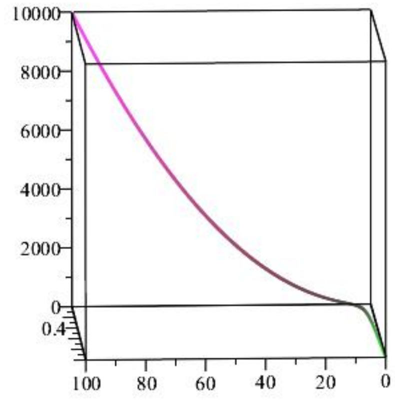
مثال ۱۶.

$$> spacecurve([cos(t), sin(t), ۱/(t^{۲}+۱)], t = ۰..۱۰ * Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$$



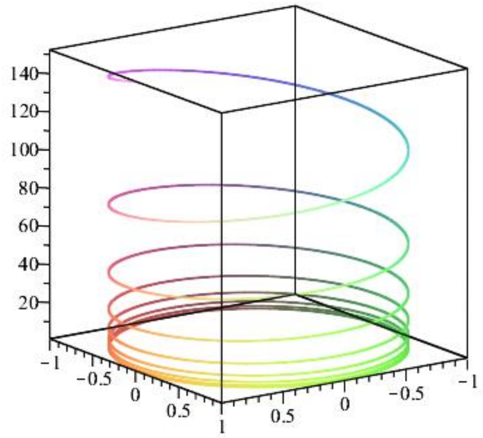
مثال ۱۷.

$$> spacecurve([t, ۱/(t^{۲}+۱), t^{۲}], t = ۰..۱۰۰, numpoints = ۱۰۰۰)$$



مثال ۱۸.

$$> spacecurve([cos(۸*t), sin(۸*t), exp(٫۸*t)], t = ۰..۲*Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$$



مثال ۱۹.

$$> spacecurve([cos(t)^۲, sin(t)^۲, t], t = ۰..۲*Pi, numpoints = ۱۰۰۰)$$