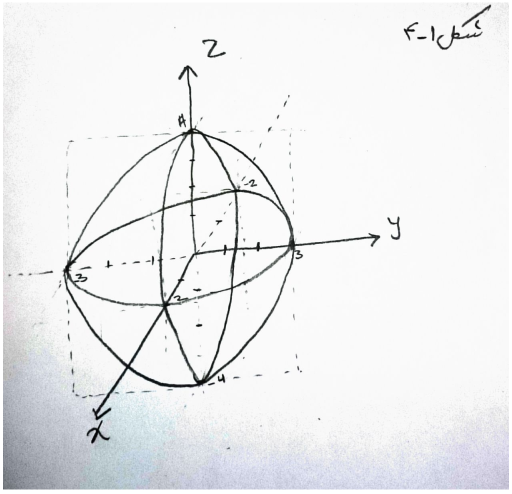
۱ جلسه‌ی چهارم

در این جلسه به حل چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱. رویه به معادله‌ی $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} + \frac{z^۲}{۱۶} = ۱$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی یادشده، معادله‌ی یک «بیضوی» است. دقت کنید که با قرار دادنِ $z = k$ به معادله‌ی یک بیضی در صفحه‌ی $z = k$ می‌رسیم و بدین‌ترتیب با قرار دادن $y = k$ و $x = k$ به بیضی‌هایی به ترتیب در صفحات $y = k$ و $x = k$ می‌رسیم.



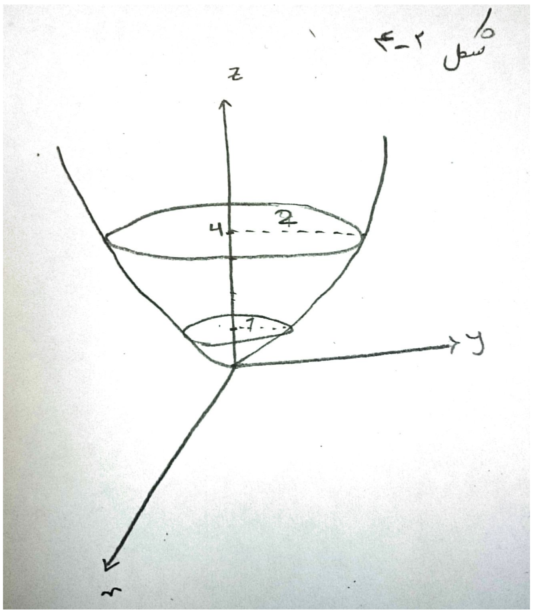
□

مثال ۲. رویه به معادله‌ی $z = x^۲ + y^۲$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی یادشده، معادله‌ی یک «سهمی‌وارِ بیضوی» است.

$$z = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰, y = ۰$$

$$z = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \text{شعاع} = ۲$$



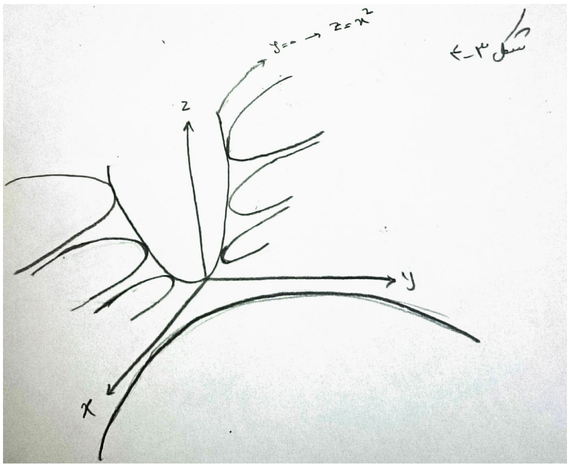
□

مثال ۳. رویه به معادله‌ی $z = x^{۲} - y^{۲}$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی یادشده، معادله‌ی یک «سهمی‌وارِ هذلولوی» است.

$$y = ۰ \Rightarrow z = x^{۲}$$

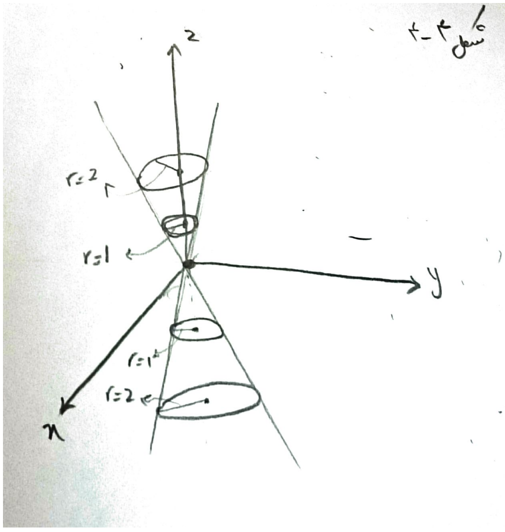
$$z = a \Rightarrow x^{۲} - y^{۲} = a \quad \text{هذلولی}$$



□

مثال ۴. رویه به معادله‌ی $z^2 = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

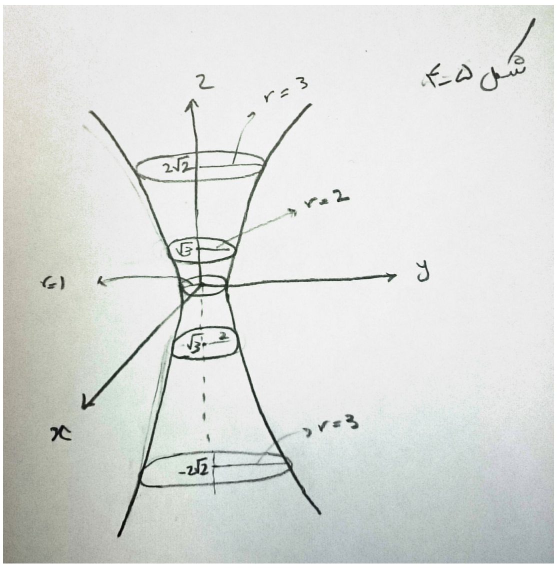
پاسخ. معادله‌ی یادشده، معادله‌ی یک «مخروط» است.



□

مثال ۵. رویه به معادله‌ی $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی یادشده، معادله‌ی یک «هذلولی‌وار یکپارچه» است.



□

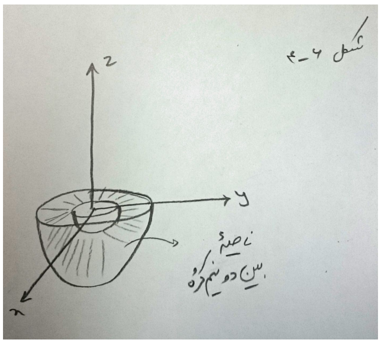
مثال ۶. ناحیه‌ی تعیین شونده توسط روابط زیر را رسم کنید.

$$\begin{cases} ۱ \leqslant x^۲ + y^۲ + z^۲ \leqslant ۴ \\ z \leqslant ۰ \end{cases}$$

پاسخ. نخست دو کره‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱ \end{cases}$$

ناحیه‌ی بین دو نیم کره به مرکز (۰،۰،۰) و زیر صفحه‌ی xy به شکل زیر است:



□

مثال ۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌های $A = (۲, ۴, -۳)$ و $B = (۳, -۱, ۱)$ می‌گذرد. نقطه‌ی تقاطع این خط را با صفحه‌ی xy بیابید.

پاسخ. برای نوشتن معادله‌ی یک خط، نیازمند به یک بردار جهت و یک نقطه روی آن خط هستیم. جهت خط توسط بردار $AB = (-۱, ۵, -۴)$ تعیین می‌شود.

معادله‌ی برداری خطی که از نقطه‌ی $P_۰$ می‌گذرد و با بردارِ v موازی است، بدین صورت است: $\mathbf{r(t)} = P_۰ + vt$ پس معادله‌ی برداری خط مورد نظر ما بدین صورت است:

$$\mathbf{r(t)} = (۲, ۴, -۳) + (-۱, ۵, -۴)t$$

معادله‌ی تقارنی خطی که از نقطه‌ی $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و با بردارِ $\mathbf{v} = (a, b, c)$ موازی است، بدین صورت است: $\frac{x-x_۰}{a} = \frac{y-y_۰}{b} = \frac{z-z_۰}{c}$ پس معادله‌ی تقارنی خط مورد نظر ما به صورت

زیر است:

$$\frac{x-۳}{-۱}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z-۱}{-۴}$$

معادله‌ی پارامتری خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=-t+۳ \\ y=۵t-۱ \\ z=-۴t+۱ \end{cases}$$

نقطه‌ی تقاطع خط با صفحه‌ی xy: در صفحه‌ی xy مؤلفه‌ی z صفر است. برای این که مؤلفه‌ی z برابر با صفر شود، باید داشته باشیم:

$$-۴t+۱=۰ \rightarrow t=\frac{۱}{۴}$$

پس نقطه‌ی زیر که با قرار دادن $t=\frac{۱}{۴}$ در معادله‌ی خط به دست آمده است، نقطه‌ی تقاطع است:
$\mathbf{r}(\frac{۱}{۴})=(-\frac{۱}{۴}+۳,۵\frac{۱}{۴}-۱,۰)$ □

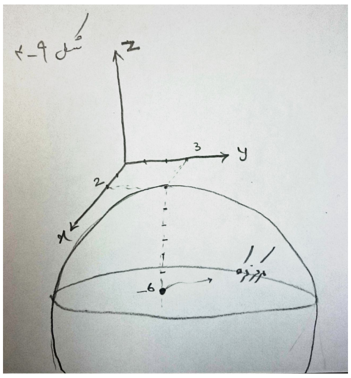
مثال ۸. بردار یکه‌ی همجهت با بردار $۲\mathbf{i}-\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$ را بیابید.

پاسخ. گفتیم که بردارِ $\mathbf{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توان به صورت $a_۱\mathbf{i}+a_۲\mathbf{j}+a_۳\mathbf{k}$ نشان داد. پس قرار است بردار یکه‌ی همجهت با بردارِ $(۲,-۱,-۲)$ را پیدا کنیم. کافی است اسکالرِ $\frac{۱}{\text{طول بردار}}$ را در بردار ضرب کنیم. یکه‌ی همجهت برابر است با $\frac{۱}{\|a\|}\mathbf{a}=\frac{۱}{۳}(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$ □

مثال ۹. معادله‌ی کره‌ای را بیابید که مرکز آن $(۲,۳,-۶)$ است و این کره به صفحه‌ی xy مماس است.

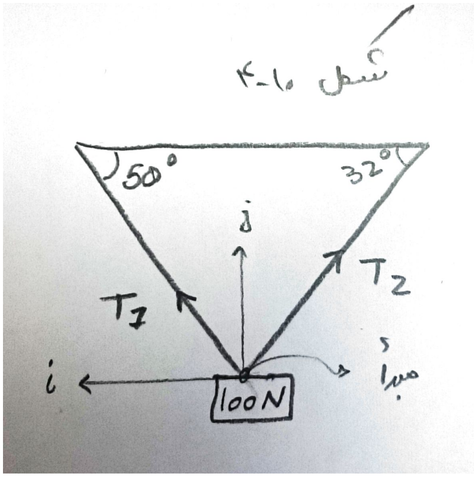
پاسخ. مرکز این کره معلوم است و برای یافتن شعاع آن، بنا به شکل کافی است فاصله‌ی مبدأ را تا صفحه‌ی xy بیابیم که این فاصله برابر با اندازه‌ی مؤلفه‌ی z است:

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲+(z+۶)=۳۶$$



□

مثال ۱۰. کششهای T_1 و T_2 و اندازه‌ی کشش‌ها را بیابید.



پاسخ. کشش، یک بردار است. بردارهای کششِ T_1 و T_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$T_1 = -|T_1|\cos 50^\circ + |T_1|\sin 50^\circ$$

$$T_2 = |T_2|\cos 32^\circ + |T_2|\sin 32^\circ$$

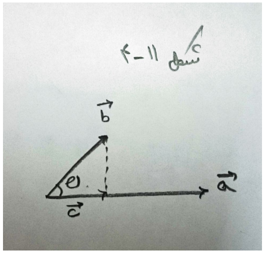
اندازه‌ی کشش، یعنی اندازه‌ی بردارِ کشش. بنا به تعادلِ فیزیکی شکل، اندازه‌ی این کششها با حل معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} |T_1|\cos 50^\circ = |T_2|\cos 32^\circ \\ |T_1|\sin 50^\circ + |T_2|\sin 32^\circ = 100 \end{cases}$$

□

مثال ۱۱. تصویر بردار $\mathbf{b} = (۱, ۱, ۲)$ را بر روی بردار $\mathbf{a} = (-۲, ۳, ۱)$ بیابید.

پاسخ. می‌دانیم که تصویر بردار $\mathbf{b}$ بر بردارِ $\mathbf{a}$ برداری در جهتِ بردارِ $\mathbf{a}$ است. بنابراین بردارِتصویر، که آن را با $\mathbf{c}$ نشان داده‌ایم، m برابرِ بردارِ جهتِ $\mathbf{a}$ است؛ یعنی m برابرِ بردارِ $\frac{۱}{\|a\|}\mathbf{a}$. کافی است عددِ m را محاسبه کنیم.



$$\mathbf{c} = m \times \frac{\mathbf{a}}{\|a\|}$$

$$m = \|b\| \cos\theta$$

$$\mathbf{c} = \|b\| \cos\theta \times \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|a\|\|b\| \cos\theta}{\|a\|^{۲}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|a\|^{۲}}\mathbf{a} = \frac{-۲ + ۳ + ۲}{۴ + ۹ + ۱}\mathbf{a} = \frac{۳}{۱۴}\mathbf{a} = \frac{۳}{۱۴}(-۲, ۳, ۱)$$

□

نکته ۱۲.

- بردارِ تصویر $\mathbf{b}$ روی $\mathbf{a}$ برابر است با:

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|a\|^{۲}}\mathbf{a}$$

- اندازه‌ی تصویر بردار $\mathbf{b}$ روی $\mathbf{a}$ برابر است با:

$$\|b\| \cos\theta = \frac{\|a\|\|b\| \cos\theta}{\|a\|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|a\|^{۲}}$$

مثال ۱۳. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطه‌ی $(۱-, ۴, ۲)$ است و بردار $\mathbf{n} = (۲, ۳, ۴)$ بر آن عمود است.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ای که شامل (x_0, y_0, z_0) باشد و بردار (a, b, c) بر آن عمود باشد، عبارت است از

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

یادآوری علت: اگر (x, y, z) نقطه‌ای روی صفحه‌ی مورد نظر باشد، آنگاه بردارِ $\mathbf{n}$ بر بردارِ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ عمود است. پس

$$\mathbf{n}.(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

با ساده کردن معادله‌ی بالا، به معادله‌ی صفحه می‌رسیم.

پس معادله‌ی مورد نظر ما به صورت زیر است:

$$2x + 3y + 4z = 4 + 12 - 4 = 12.$$

□

مثال ۱۴. محل تلاقی خط

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

را با صفحه‌ی

$$4x + 5y - 2z = 18$$

را بیابید.

پاسخ. معادله‌ی پارامتری خط را در معادله‌ی صفحه قرار می‌دهیم.

$$8 + 12t - 20t - 10 - 2t = 18 \Rightarrow -10t = 20 \Rightarrow t = -2$$

نقطه‌ی تقاطع:

$$\begin{cases} x = 2 - 6 = -4 \\ y = 8 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \text{نقطه‌ی تقاطع} = (-4, 8, 3)$$

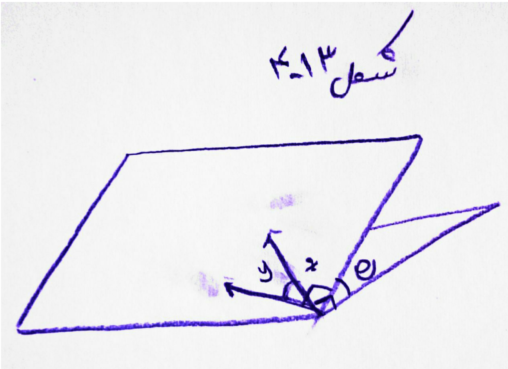
□

مثال ۱۵. زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی

$$\begin{cases} x+y+z=۱ \\ x-۲y+۳z=۱ \end{cases}$$

را بیابید.

پاسخ. با توجه به شکلِ زیر، زاویه‌ی بین دو صفحه، برابر است با زاویه‌ی بین بردارهای عمود بر آنها:



$$\begin{cases} x+\theta=۹۰ \\ y+x=۹۰ \end{cases} \Rightarrow y=\theta$$

داریم

$$\mathbf{n}_۱=(۱,۱,۱)$$

$$\mathbf{n}_۲=(۱,-۲,۳)$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_۱\cdot\mathbf{n}_۲}{\|n_۱\|\|n_۲\|}$$

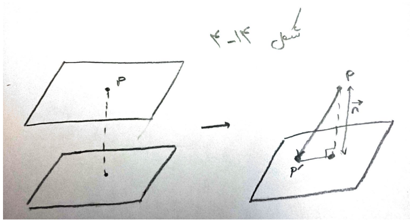
□

مثال ۱۶. فاصله‌ی بین دو صفحه‌ی موازی

$$\begin{cases} ۱۰x+۲y-۲z=۵ \\ ۵x+y-z=۱ \end{cases}$$

را بیابید.

پاسخ. نخست توجه کنید که دو صفحه‌ی یادشده واقعاً موازیند، زیرا بردارهای نرمال آنها با هم موازیند. بردار نرمال اولی برابر است با $(۱۰, ۲, -۲)$ و بردار نرمال دومی برابر است با $(۵, ۱, -۱)$ که برابر با یک دومِ بردار $(۱۰, ۲, -۲)$ است.



برای پیدا کردن فاصله‌ی بین دو صفحه، کافی است فاصله یک نقطه از یک صفحه را تا صفحه‌ی دیگر بیابیم. نیز یادآوری می‌کنیم که مطابق شکل، برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی P از یک صفحه، خطی از نقطه‌ی P به یک نقطه‌ی دلخواهِ P' روی آن صفحه رسم می‌کنیم. حال کافی است اندازه‌ی تصویر بردارِ PP' را روی بردارِ عمود بر صفحه، یعنی $\mathbf{n}$ بیابیم. پس فاصله‌ی نقطه‌ی (x, y, z) از صفحه‌ی $ax + by + cz = ۰$ برابر است با

$$\|PP'\| \cos\theta = \frac{\|n\|\|PP'\|}{\|n\|} \cos\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{PP'}}{\|n\|} = \frac{\|ax + by + cz + d\|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

برای پاسخ دادن به سوال، فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (\frac{۱}{۲}, ۰, ۰)$ روی صفحه‌ی اول را تا صفحه‌ی دوم به معادله‌ی

$$۱۰x + ۲y - ۲z = ۵$$

محاسبه می‌کنیم که برابر است با

$$\frac{|\frac{۵}{۲} - ۱|}{\sqrt{۲۷}}$$

□