۱ جلسه‌ی پایانی

مثال ۱. سری مک‌لوران تابع $f(x) = \cos x$ را بیابید.

پاسخ.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = \cos x && f'(x) = \sin x && f''(x) = -\cos x \\
&f'''(x) = \sin x && f^{(4)}(x) = \cos x && f^{(5)}(x) = -\sin x \\
&f^{(6)}(x) = -\cos x && f^{(7)}(x) = \sin x && f^{(8)}(x) = \cos x
\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6 + \dots$$

□

مثال ۲. سری مک‌لوران تابع $x^3 \cos x$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$x^3 \cos x = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+3}$$

□

مثال ۳. سری مک‌لوران تابع $f(x) = (1+x)^k$ را بنویسید که در آن k یک عدد گویای دلخواه است.

اثبات.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(0) = k$$
$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(0) = k(k-1)$$
$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \Rightarrow f'''(0) = k(k-1)(k-2)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))}{n!} x^n$$

بیایید عبارت $\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))}{n!}$ را با نمادِ $\binom{k}{n}$ نمایش دهیم. پس داریم

$$f(x) = (1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\dots$$

اگر k یک عدد طبیعی باشد، ضرایب از جائی به بعد همه صفر می‌شوند؛ مثلاً:

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

□

$$\boxed{(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots}$$

توجه ۴. در صورتی که $k < 0$ دامنه‌ی تابع $|x| < 1$ است. مثال:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f(0) = 1$$
$$f(x) = 1 + (-1)x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{(-2)(-1)(-3)}{3!}x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^۲ - x^۳ + x^۴ - x^۵ + \ldots =$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n = \sum_{n=۰}^{\infty}(-x)^n$$

یادآوری ۵. قبلاً ثابت کردیم که اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x}$$

بنابراین

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-x)^n = \frac{۱}{۱+x}$$

پس عبارت مثال بالا با این فرمول هم به دست می‌آید.

مثال ۶. سری مک‌لوران تابع $\frac{۱}{۱+x^۲}$ را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{۱}{۱+x} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-x)^n$$

$$\frac{۱}{۱+x^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{۲n}$$

□

توجه ۷.

مثال ۸. سری مک‌لوران تابع $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}$ را بدست آورید.

پاسخ.

توجه ۹. گفتیم که در بسط مک‌لوران تابع $(۱+x)^k$، عدد k می‌تواند عدد غیر صحیح باشد.

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۴(۱-\frac{x^۲}{۴})}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۴}}} = \frac{۱}{۲(۱-\frac{x^۲}{۴})^{\frac{۱}{۲}}}$$

برای محاسبه‌ی مخرج دوباره به فرمول زیر نیاز داریم:

$$(۱+x)^k = ۱ + kx + \frac{k(k-۱)}{۲!}x^۲ + \frac{k(k-۱)(k-۲)}{۳!}x^۳ + \dots$$

$$(۱-y)^{-\frac{۱}{۲}} = \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{\frac{-۱}{۲}}{n} y^n = ۱ + \frac{۱}{۲}y - \frac{۳}{۸}y^۲ + \frac{۱۵}{۸}\frac{y^۳}{۳!} + \dots$$

$$f(x) = \frac{۱}{۲(۱-\frac{x^۲}{۴})^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۲}(۱ + \frac{۱}{۲}(\frac{x^۲}{۴}) - \frac{۳}{۸}\frac{x^۴}{۱۶} + \dots)$$

□

تمرین ۱۰. بسط مک‌لوران تابع $\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}$ را بیابید.

مثال ۱۱. بسط مک‌لوران تابع زیر را بنویسید.

$$\ln(x+۱)$$

پاسخ.

$$\ln(x+۱) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n$$

$$f(x) = \ln(۱+x) \qquad f'(x) = \frac{۱}{۱+x} \qquad f''(x) = \frac{-۱}{(۱+x)^۲}$$

$$f'''(x) = \frac{۲(۱+x)}{(۱+x)^۴} = \frac{۲}{(۱+x)^۳} \quad f^{(۴)}(x) = \frac{۲ \times -۳(۱+x)^۲}{(۱+x)^۶} = \frac{-۶}{(x+۱)^۴}$$

$$f(۰) = ۰ \qquad f'(۰) = ۱ \qquad f''(۰) = -۱$$

$$f'''(۰) = ۲ \qquad f^{(۴)}(۰) = -۶$$

$$\ln(x+۱) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n = ۰ + x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۵}x^۵ - \frac{۱}{۶}x^۶ + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{n}$$

□

مثال ۱۲. حاصلجمع زیر را بیابید.

$$\frac{۱}{۱\times ۲} - \frac{۱}{۲\times ۲^۲} + \frac{۱}{۳\times ۲^۳} - \frac{۱}{۴\times ۲^۴} + \frac{۱}{۵\times ۲^۵} - \dots = \ln(۱+\frac{۱}{۲})$$

پایان درس

آرزومند توفیق شما،

خانی