۱ جلسه‌بیست و ششم

یادآوری ۱.

۱. در جلسه‌ی قبل گفتیم که اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots = \frac{۱}{۱-x} \quad (*)$$

۲. از دوره‌ی دبیرستان به خاطر دارید که

$$(a+b)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

توجه داشته باشید که مجموع توان‌های a و b برابر است با n و

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-i+۱)}{i!}$$

$$(x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$$

$$(x+۱)^۳ = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱$$

$$(x+۱)^۴ = \binom{۴}{۰} x^۴ \times ۱^۰ + \binom{۴}{۱} x^۳ \times ۱^۱ + \binom{۴}{۲} x^۲ \times ۱^۲ + \binom{۴}{۳} x^۱ \times ۱^۳ + \binom{۴}{۴} x^۰ \times ۱^۴ = x^۴ + ۴x^۳ + ۶x^۲ + ۴x + ۱$$

در جلسه‌ی بعدی حاصل $(a+b)^{-n}$ را نیز محاسبه خواهیم کرد. همان گونه که در $*$ مشاهده کردیم تابع $\frac{۱}{۱-x}$ را می‌توان به صورت حاصلجمعی نامتناهی از چند جمله‌ای‌های x^n نوشت.

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots$$

هدف ۲. پیدا کردن یک بسط چند جمله‌ای نامتناهی برای برخی توابع.

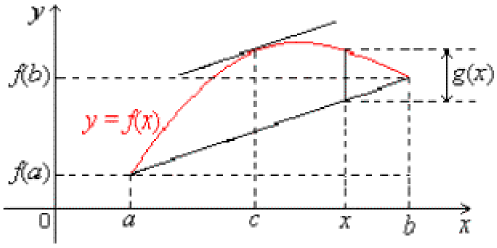
یادآوری ۳ (قضیه‌ی مقدار میانگین)**.** فرض کنید تابع f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. آنگاه مقدار میانگین بیانگر این است که

$$\exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

نکته ۴. تعریف مشتق به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

از لحاظ هندسی قضیه‌ی مقدار میانگین می‌گوید که شیب خط گذرنده از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ برابر است با شیب خط مماس در نقطه‌ی c.



پس اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی I مشتق‌پذیر باشد و $a,x\in I$ آنگاه

$$\exists c\in(a,x)\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

به بیان دیگر

$$f(x)=f(a)+\underbrace{f'(c)(x-a)}_{\text{خطا}}$$

فرمول فوق مقدار $f(x)$ را بر حسب $f(a)$ با خطای $(x-a)f'(c)$ بدست می‌دهد. فرض کنید بدانیم که برای تابع f داریم:

$$|f'|<\frac{۱}{۲}$$

$$|x-۰|<\frac{۱}{۱۰}$$

$$f(x)\simeq f(a)$$

$$\text{خطا}\leqslant\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

قضیه ۵. فرض کنید تابع f در بازه‌ی I دو بار مشتق‌پذیر باشد و $x,a\in I$. آنگاه

$$\exists c\in(a,x)\quad f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\underbrace{\frac{f''(c)}{۲}(x-۲)^{۲}}_{\text{خطای تقریب}}$$

تعمیم ۶. اگر f چهار بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقطه‌ی $c \in (a, x)$ چنان موجود است که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲} + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳} + \underbrace{\frac{f^{(۴)}(c)}{۴!}(x-a)^{۴}}_{\text{خطای تقریب}}$$

به طور کلی اگر تابع f، $n+۱$ بار مشتق‌پذیر باشد، نقطه‌ی $c \in (a, x)$ چنان موجود است که

$$f(x) = \underline{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲} + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}} +$$

$$\underbrace{\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}}_{B}$$

به عبارتی که زیر آن خط کشده شده است چند جمله‌ای تیلور از درجه‌ی n حول نقطه‌ی a برای تابع f گفته می‌شود. به B خطای تقریب گفته می‌شود.

مثال ۷. یک مقدار تقریبی برای $\sin \frac{\pi}{۸}$ و یک کران بالا برای خطای این تقریب بیابید.

پاسخ.

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(۴)}(x) = \sin x \qquad f^{(۵)}(x) = \cos x$$

$$f(x) = f(۰) + f'(۰)(x-۰) + \frac{f''(۰)}{۲!}(x-۰)^{۲} + \frac{f'''(۰)}{۳!}(x-۰)^{۳} +$$
$$\frac{f^{(۴)}(۰)}{۴!}(x-۰)^{۴} + \frac{f^{(۵)}(c)}{۵!}(x-۰)^{۵} =$$
$$۰ + ۱(x) + \frac{۰}{۲!} \times x^{۲} + \frac{-۱}{۳!}x^{۳} + \frac{۰}{۴!}x^{۴} + \frac{\cos(c)}{۵!}x^{۵} =$$
$$\underbrace{x - \frac{x^{۳}}{۳!}}_{\text{تقریب}} + \underbrace{\frac{\cos(c)}{۵!}x^{۵}}_{\text{خطای تقریب} \leqslant \frac{x^{۵}}{۵!}}$$

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۸} - \frac{(\frac{\pi}{۸})^۳}{۵!}$$

$$\sin\frac{\pi}{۸} \text{ خطای تقریب } \leqslant \frac{(\frac{\pi}{۸})^۵}{۵!}$$

□

۱.۱ سری تیلور

فرض کنید تابع f بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر باشد. عبارت زیر را بسط تیلور تابع f حول نقطه‌ی a می‌خوانیم.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^۳ + \ldots +$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

توجه ۸. هر تابعی که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد برایش می‌توان بسط تیلور نوشت ولی این بسط تیلور لزوماً برابر با خودِ تابع نخواهد شد. به توابعی که با بسط تیلور خود برابر باشند، **توابع تحلیلی** گفته می‌شود. در واقع اگر تابع f را بتوان به صورت یک سری نمایش داد، آن سری برابر با سری تیلور تابع f خواهد بود (به مثال زیر نگاه کنید).

مثال ۹.

$$|x| < ۱ \Rightarrow \quad \frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

توجه ۱۰. اگر $a = ۰$ (یعنی اگر سری تیلور حول نقطه‌ی ۰ نوشته شود) به سری تیلور مورد نظر، سری مک‌لوران گفته می‌شود.

مثال ۱۱. سری مک‌لوران تابع e^x را بیابید.

پاسخ.

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!} x^n$$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=$$
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$
$$e=e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

□

مثال ۱۲. سری مک‌لوران تابع $\sin x$ را بیابید.

پاسخ.

$$f(x)=\sin x \qquad f'(x)=\cos x \qquad f''(x)=-\sin x$$
$$f'''(x)=-\cos x \qquad f^{(4)}(x)=\sin x \qquad f^{(5)}(x)=\cos x$$
$$f^{(6)}(x)=-\sin x \qquad f^{(7)}(x)=-\cos x \qquad f^{(8)}(x)=\sin x$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=$$
$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots=$$
$$0+\frac{1}{1!}x+0+\frac{-1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5+0+\frac{-1}{7!}x^7+\dots=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

□

مثال ۱۳. بسط مک‌لورانِ تابع $x^2\sin x$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1!}x^{2n+1}$$

$$x^2\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1+2}}{(2n+1)!}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}=x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\frac{x^9}{7!}+\dots$$

□