۱ جلسه‌ی بیست و پنجم

بررسی علت واگرائي سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n}$ و علت همگرائی سریِ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$.

توجه ۱.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}) +$$
$$(\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶}) + \dots$$
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \geqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}) + (۴ \times \frac{۱}{۸}) + (۸ \times \frac{۱}{۱۶}) + (۱۶ \times \frac{۱}{۳۲}) + \dots$$
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \geqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$
$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \mapsto \infty$$

پس این سری واگراست.

توجه ۲.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = ۱ + (\frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲}) + (\frac{۱}{۴^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \frac{۱}{۶^۲} + \frac{۱}{۷^۲}) +$$
$$(\frac{۱}{۸^۲} + \frac{۱}{۹^۲} + \frac{۱}{۱۰^۲} + \frac{۱}{۱۱^۲} + \frac{۱}{۱۲^۲} + \frac{۱}{۱۳^۲} + \frac{۱}{۱۴^۲} + \frac{۱}{۱۵^۲}) + \frac{۱}{۱۶^۲} + \dots$$
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} \leqslant ۱ + (\frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۲}) + (\frac{۴}{۴^۲}) + (\frac{۸}{۸^۲}) + (\frac{۱۶}{۱۶^۲}) + \dots$$
$$= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۲^۵} + \dots = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲$$

پس این سری همگراست.

نکته ۳. به طور کلی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ واگراست اگر و تنها اگر $۰ < p < ۱$. پس برای $p > ۱$ این سری همگراست و برای $۰ < p \leqslant ۱$ واگراست.

مثال ۴. $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۳}}\leqslant\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$$
چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$ همگراست پس نتیجه می‌شود که $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۳}}$ نیز پیوسته است. □

مثال ۵. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\geqslant\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$$
چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ واگراست پس نتیجه می‌شود که $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ نیز واگراست. □

مثال ۶. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}+۱}$ همگراست یا واگراست؟

پاسخ.
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}+۱}\leqslant\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$$
چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$ همگراست پس نتیجه می‌شود که $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}+۱}$ نیز همگراست. □

قضیه ۷. فرض کنید $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$ در سری با جملات نامنفی باشند. اگر $a_n\leqslant b_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ همگراست. اگر $a_n\geqslant b_n \quad \forall n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n$ واگراست.

مثال ۸. سری زیر همگراست یا واگرا؟
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۵}{۲n^{۲}+۴n+۳}$$

پاسخ.
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۵}{۲n^{۲}+۴n+۳}\leqslant\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۵}{۲n^{۲}}=\frac{۵}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$$
چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$ همگراست پس $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۵}{۲n^{۲}+۴n+۳}$ نیز همگراست. □

تمرین ۹. نشان دهید که $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ واگراست.

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{\ln e}{k} = \frac{۱}{k}$$

$\ln x$ یک تابع صعودی است. می‌خواهیم $\ln k > \ln e$ پس $k > e$ در نتیجه $k \geqslant ۳$. یعنی از جمله‌ی سوم به بعد عناصر سری از $\frac{۱}{k}$ بیشترند، پس این سری واگراست.

توجه ۱۰. اگر $a_n, b_n \geqslant ۰$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ که $l > ۰$ و $l \neq \infty$ است آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشد.

مثال ۱۱. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-۱}$ همگراست یا واگرا؟

$$b_n = \frac{۱}{n^۲}$$

می‌دانیم که سری $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست.

$$a_n = \frac{۱}{n^۲ - ۱}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n^۲-۱} = ۱$$

پس بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی سری $\sum \frac{۱}{n^۲-۱}$ همگراست.

مثال ۱۲. $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-n}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.

$$\frac{۱}{n^۲-n} = \frac{۱}{n(n-۱)} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$$

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-n} = \sum_{n=۲}^{\infty} (\frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n})$$

$$s_۴ = (۱ - \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) + (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}) = ۱ - \frac{۱}{۴}$$

$$s_m = (۱ - \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) + (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}) + \ldots + (\frac{۱}{m-۱} - \frac{۱}{m}) = ۱ - \frac{۱}{m}$$

$$\lim_{m\to\infty} s_m = ۱$$

پس سری مورد نظر همگراست. □

نکته ۱۳.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

مثال ۱۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{n})}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}_{B}$$

قسمت A همانند مثال قبل حل می‌شود و همگراست. قسمت B نیز همگراست:

$$s_m = \sum_{n=2}^{m}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{2}$$

پس B نیز همگراست. $\square$

مثال ۱۵. واگرایی و همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ را بررسی کنید.

پاسخ. می دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = 1$$

پس بنا به آزمون مقایسه‌ی حدی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ همگراست. $\square$

۱.۱ آزمون نسبت

فرض کنید a_n $\sum_{n=.}^{\infty}$ یک سری با جملات نامنفی باشد. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

۱. اگر $l < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

۲. اگر $l > 1$ یا $l = \infty$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

۳. اگر $l = 1$ این آزمون هیچ نتیجه‌ای بدست نمی‌دهد.

مثال ۱۶. نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ همگراست.

پاسخ.

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

در نتیجه $\sum a_n$ همگراست. پس $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ همگراست.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$(\text{عدد نپر})e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1$$

□

نکته ۱۷.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{اویلر}$$

مثال ۱۸. نشان دهید که برای هر عدد دلخواه x، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همواره همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

بنا به آزمون نسبت، سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست. □

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{e^x}{\mapsto} ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

به تابع فوق، تابع نمایی گفته می‌شود.
در درسهای آینده خواهیم دید که نمایش سری تیلور تابع e^x برابر است با

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$