۱ جلسه‌ی بیست و چهارم

اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، عبارت زیر را یک سری از اعداد حقیقی می‌خوانیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

مثال ۱. فرض کنیم که $a_n = n$ آنگاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 + 1 + 2 + \dots$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، حاصل جمع بالا نامتناهی است (یعنی از هر عددی که تصور کنیم بزرگتر است). در این صورت می‌گوئیم سری واگرا به بی‌نهایت است.

اگر a_n یک دنباله باشد و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد؛ تعریف می‌کنیم:

$$s_m := a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

داریم

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_m = a_0 + \dots + a_m$$

پس $\{s_m\}_m^{\infty}$ خودْ یک دنباله است و

$$\lim_{m\to\infty} s_m = a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

مثال ۲. فرض کنید $a_n = (\frac{1}{2})^n$، و سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

قرار دهید

$$s_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

توجه کنید که اگر قرار باشد که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ برابر با یک عدد l شود، آنگاه

$$l = \lim_{m\to\infty} s_m$$

برای دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{2^n}$ داریم:

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

$$\frac{1}{2}s_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$s_m - \frac{1}{2}s_m = (1 - \frac{1}{2})s_m = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \Rightarrow$$

$$s_m = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

یعنی ثابت کردیم که

$$(\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^m = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

حال توجه کنید که

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

پس ثابت شد که:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

تعریف ۳. فرض کنید که $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله باشد و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری باشد. می‌گوییم سریِ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا به عدد l است هر گاه دنباله‌ی $s_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$ همگرا به l باشد؛ یعنی

$$\lim_{m\to\infty} s_m = l$$

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$$

$$s_{m+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_m + a_{m+1}$$

توجه ۴.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mapsto \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

مثال ۵. فرض کنید $|r| < 1$ باشد، نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ همگراست.

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{r^0 + r^1}_{s_1} + r^2}_{s_2} + \ldots + r^m}_{s_m} + \ldots$$

$$s_m = r^0 + \ldots + r^m$$

$$rs_m = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^m + r^{m+1}$$

پس

$$s_m(1-r) = 1 - r^{m+1},$$

بنابراین:

$$s_m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

و

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{1-r}$$

به بیان دیگر اگر $|r| < ۱$ آنگاه

$$۱ + r + r^۲ + r^۳ + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} r^n = \frac{۱}{۱ - r}$$

به سری بالا یک سری هندسی با قدر نسبت r گفته می‌شود. این سری هندسی همگراست اگروتنهااگر $|r| < ۱$. یعنی اگر $|r| \geq ۱$ این سری واگراست. $\square$

مثال ۶.

$$a_n = n$$

$$s_m = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + m$$

یعنی سریِ $\sum_{n=۰}^{\infty} n$ واگراست.

مثال ۷. فرض کنید $a_n = (\frac{۱}{۳})^n$ آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ را حساب کنید.

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۱}{۳})^n = (\frac{۱}{۳})^۰ + (\frac{۱}{۳})^۱ + (\frac{۱}{۳})^۲ + \ldots$$

عبارت فوق یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۳}$ است. پس

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۱}{۳})^n = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

$\square$

مثال ۸. آیا سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (۲^{۲n} \cdot ۳^{۱-n})$ همگراست؟

پاسخ.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{۲n} \times ۳^{۱-n} = ۳ + ۴ + ۲^۴ \times ۳^{-۱} + ۲^۶ \times ۳^{-۲} + \ldots$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{۲n} \times ۳^{۱-n} = \sum_{n=۰}^{\infty} ۴^n \times ۳^{۱-n} = ۳ \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۴}{۳})^n$$

سری فوق یک سری هندسی با قدر نسبت $r = \frac{۴}{۳}$ است. $۱ < \frac{۴}{۳}$ پس سری فوق واگراست. $\square$

مثال ۹. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{۲n} \cdot ۵^{۱-n}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \times 5^{-n} \times 5 = 5\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^n$$

سری فوق یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ است. $\frac{4}{5} < 1$ بنابراین

$$5\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^n = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} \times 5 = 25$$

□

مثال ۱۰. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n}$ همگراست یا واگرا؟

پاسخ.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{4})^n + (\frac{3}{4})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{4})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n =$$

$$\frac{1}{1-\frac{2}{4}} + \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 2 + 4 = 6$$

□

۱.۱ جمع‌بندی

۱. سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$

۲.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

۳. اگر λ یک عدد ثابت باشد آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

۴.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) \neq a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

توجه کنید که از این که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگراست. مثال زیر، مثال نقض جالبی است. در آن می‌بینیم که با این که در دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ جملات در حال کوچکتر شدن هستند، اما حاصلجمع اعضای این دنباله، نامتناهی است:

مثال ۱۱. نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست.

پاسخ.

$$s_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n}$$

$$\begin{aligned}
&s_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲}\\
&s_۴ = ۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}) \geqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲\\
&s_۸ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} \geqslant ۱ + \frac{۱}{۲} + ۲(\frac{۱}{۴}) + ۴(\frac{۱}{۸}) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۳}{۲}\\
&s_{۱۶} \geqslant ۱ + \frac{۴}{۲}\\
&\Rightarrow s_{۲^m} \geqslant ۱ + \frac{m}{۲}
\end{aligned}$$

$$\lim_{m\to\infty} ۱ + \frac{m}{۲} = \infty$$

پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. $\square$

توجه ۱۲. اگر سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$

اثبات.

$$s_{n-۱} = a_۰ + a_۱ + \ldots + a_{n-۱}$$

$$s_n = a_۰ + a_۱ + \ldots + a_n$$

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} s_n = l$ و $\lim_{n\to\infty} s_{n-۱} = l$

$$a_n = s_n - s_{n-۱}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-۱} = ۰$$

$\square$

توجه ۱۳. عکس توجه بالا برقرار نیست. مثال نقض آن سری $\sum \frac{1}{n}$ است.

مثال ۱۴. نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ واگراست.

پاسخ.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5} \neq 0$$

پس بنا به توجه ۱۲ سری مورد نظر واگراست. □