۱ جلسه‌ی بیست و سوم

مثال ۱. حجم جسمی را بیابید که زیر مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و بالای حلقه‌ی $۱ \leqslant x^۲ + y^۲ \leqslant ۴$ واقع شده است.

پاسخ. ناحیه‌ی R یک مستطیل قطبی به صورت زیر است:

$$\{(r, \theta) | ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi, ۱ \leqslant r \leqslant ۲\}$$

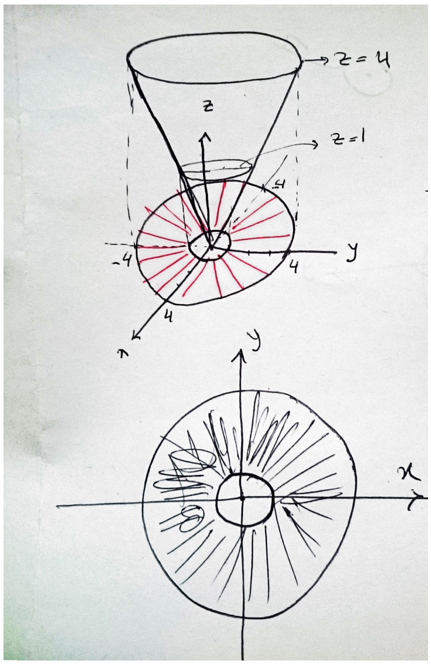
حجم مورد نظر برابر است با

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_۰^{۲\pi} \int_۱^۲ \sqrt{x^۲ + y^۲} r dr d\theta$$

از آنجا که می‌دانیم $x^۲ + y^۲ = r^۲$ پس داریم:

$$\int_۰^{۲\pi} \int_۱^۲ r^۲ dr d\theta = \int_۰^{۲\pi} \frac{r^۳}{۳}|_۱^۲ d\theta =$$

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{۷}{۳} d\theta = \frac{۷}{۳}\theta|_۰^{۲\pi} = \frac{۱۴}{۳}\pi$$



□

توجه ۲. معادله‌ی $z^2 = x^2 + y^2$ معادله‌ی یک مخروط است و معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ یک سهمی‌وار بیضوی است (هر دو را به عنوان تمرین رسم کنید).

مثال ۳. حجم جسمی را بیابید که درون کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = 16$ و خارج استوانه‌ی $x^2+y^2 = 4$ واقع شده است.

پاسخ.

$$R = \{(r,\theta) | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 2 \leqslant r \leqslant 4\}$$

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^{2\pi} \int_2^4 \sqrt{16 - r^2} r dr d\theta$$

$$16 - r^2 = u \Rightarrow du = -2rdr$$

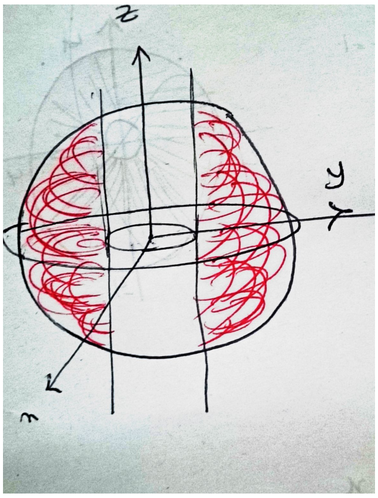
$$\int_2^4 -\sqrt{16 - r^2} dr d\theta = \int_2^4 -\sqrt{u} \times (\frac{1}{2})du = (-\frac{1}{2})(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}) =$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (16 - r^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times (16 - r^2)^{\frac{3}{2}} |_2^4 = 4\sqrt{12}$$

$$\int_0^{2\pi} 4\sqrt{12} d\theta = 4\sqrt{12}\theta|_0^{2\pi} = 8\sqrt{12}\pi$$

نصف حجم مورد نظر برابر است با $8\sqrt{12}\pi$ پس حجم مورد نظر برابر است با

$$16\sqrt{12}\pi$$



□

مثال ۴. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int \tan x dx$$

پاسخ.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow dx = -\sin x dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\cos x|$$

□

تمرین ۵. نشان دهید که

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx . \int_c^d g(y)dy$$

یکی از انتگرال‌های مهم که در کاربرد، بدان نیازمندیم انتگرال زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx$$

در زیر این انتگرال را با به کارگیری مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم. اولاً

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^۲} dy$$

ثانیاً مطابق نکته‌ی بالا داریم:

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^۲} \times e^{-y^۲}) dxdy}^{A} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^۲} dy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx)^۲$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲-y^۲} dxdy = \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\infty} e^{-r^۲} r dr d\theta$$

$$u = -r^۲ \Rightarrow du = -۲r dr$$

$$\int_{۰}^{\infty} e^u (-\frac{du}{۲}) = -\frac{۱}{۲} \int_{۰}^{\infty} e^u du = -\frac{۱}{۲} e^u |_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲} e^{-r^۲} |_{۰}^{\infty} = -\frac{۱}{۲}(۰ - ۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{r \to \infty} e^{-r^۲} = \lim_{r \to \infty} \frac{۱}{e^{r^۲}} = ۰$$

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{۲} d\theta = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx = \sqrt{\pi}$$

۲ سریها (سریهای تیلور)

منظور از دنباله، یک لیست نامتناهی از اعداد است.

$$a_۰, a_۱, a_۲, \dots$$

در واقع دنباله، تابعی مانند f است از اعداد طبیعی به اعداد حقیقی، مانند تابع زیر:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n$$

فرض کنید $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک دنباله باشد. می‌خواهیم درباره‌ی حاصلجمع اعضای این دنباله بحث کنیم:

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \dots$$

حاصلجمع یاد شده را با نماد

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$$

نشان می‌دهیم، و به آن یک **سری** می‌گوئیم.