۱ جلسه‌ی بیست و دوم

تمرین ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(آ).

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۱}^{۲}(x-e^{-y})dxdy$$

(ب).

$$\iint_R \sqrt{۲}dA \quad R=\{(x,y)|۲\leqslant x\leqslant ۶, \quad -۱\leqslant y\leqslant ۵\}$$

(ج).

$$\int_{۱}^{۴}\int_{۰}^{۲}(۶x^۲y-۲x)dydx$$

(د).

$$\int_{۱}^{۴}\int_{۱}^{۲}(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})dydx$$

تمرین ۲. حجم جسم زیر صفحه‌ی $۴x+۶y-۲z+۱۵=۰$ و بالای مستطیل $R=\{(x,y)|-۱\leqslant x\leqslant ۲, \quad -۱\leqslant y\leqslant ۱\}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۳. حجم جسم قرار گرفته در ناحیه‌ی بالای مستطیل $R=[-۱,۱]\times[۱,۲]$ و زیر سهمی‌وارِ هذلولوی $z=۳y^۲-x^۲+۲$ را محاسبه کنید.(به همراه رسم)

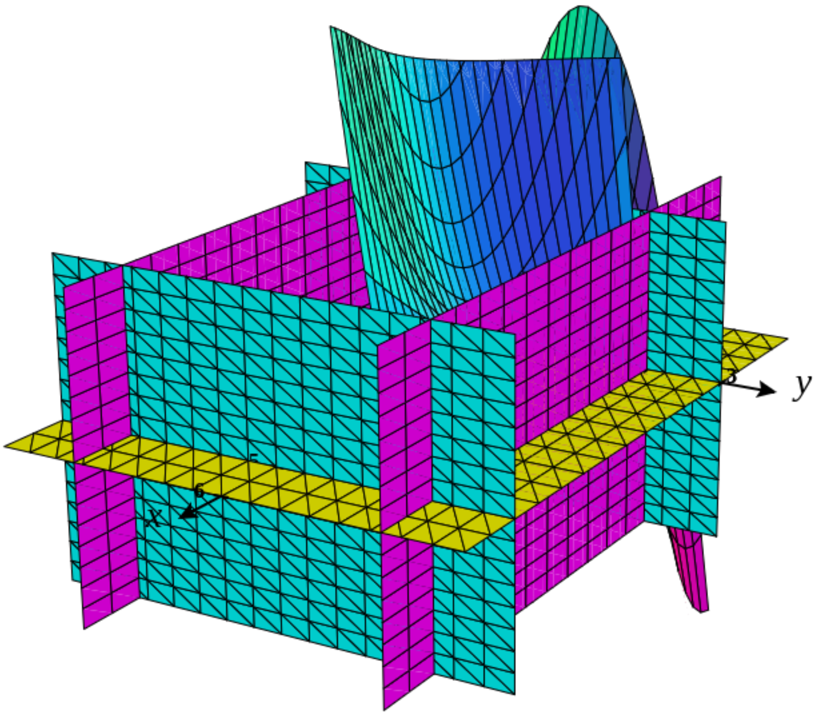
مثال ۴. حجم جسمی را بیابید که توسط رویه‌ی $z=x^۲+xy^۲$ و صفحات $z=۰$، $x=۰$، $x=۵$ و $y=\pm ۲$ احاطه شده است.

پاسخ. حجم زیر رویه و روی مستطیل برابر است با

$$\int_{۰}^{۵}\int_{-۲}^{۲}(x^۲+xy^۲)dydx$$

$$\int_{-۲}^{۲}(x^۲+xy^۲)dy=(x^۲y+\frac{xy^۳}{۳})|_{-۲}^{۲}=۴x^۲+\frac{۱۶}{۳}x$$

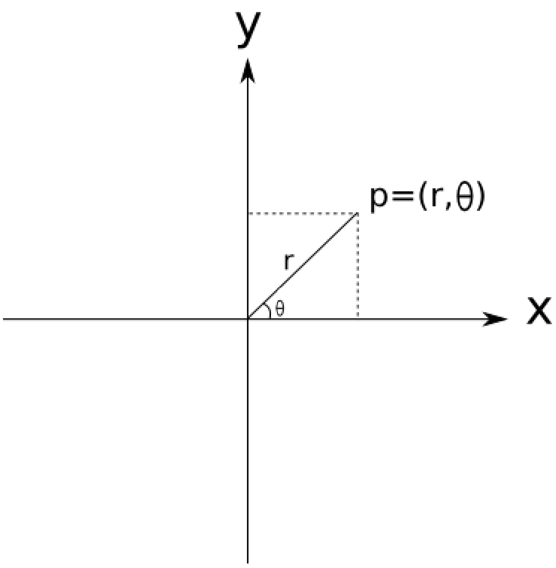
$$\int_{۰}^{۵}(۴x^۲+\frac{۱۶}{۳}x)dx=(\frac{۴}{۳}x^۳+\frac{۸}{۳}x^۲)|_{۰}^{۵}=۲۳۳/۳۳$$

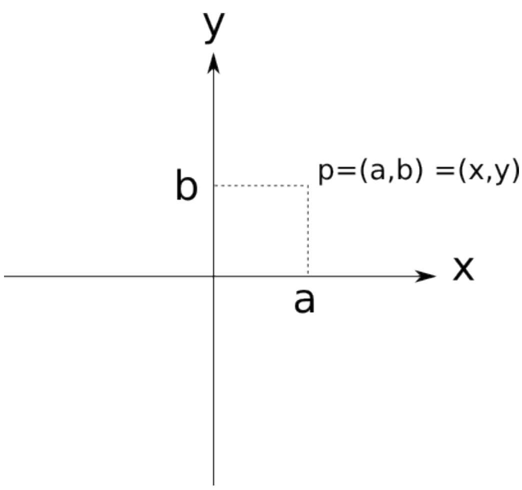


□

تمرین ۵. حجم جسمی رابیابید که زیر سهمی‌وار بیضوی $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{9}+z=1$ و بالای مستطیل $R=[-1,1]\times[-2,2]$ واقع شده است.

۱.۱ انتگرال‌گیری با استفاده از مختصات قطبی





در مختصات اقلیدسی یک ناحیه به شکل مستطیل، یعنی یک ناحیه به صورت زیر:

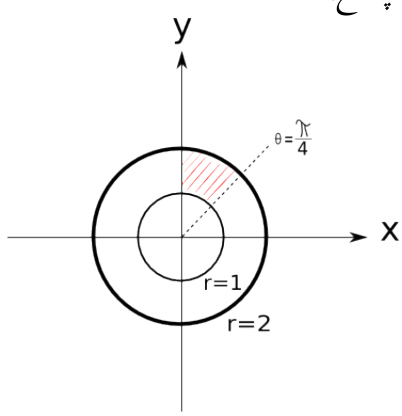
$$R = \{(x, y) | -۱ \leqslant x \leqslant ۱, \quad -۲ \leqslant y \leqslant ۲\}$$

در مختصات قطبی نیز نواحی موسوم به مستطیلی داریم:

مثال ۶. ناحیه‌ی مشخص شده توسط مستطیل قطبیِ زیر را رسم کنید.

$$R = \{(r, \theta) | ۱ \leqslant r \leqslant ۲, \quad \frac{\pi}{۴} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}\}$$

پاسخ.

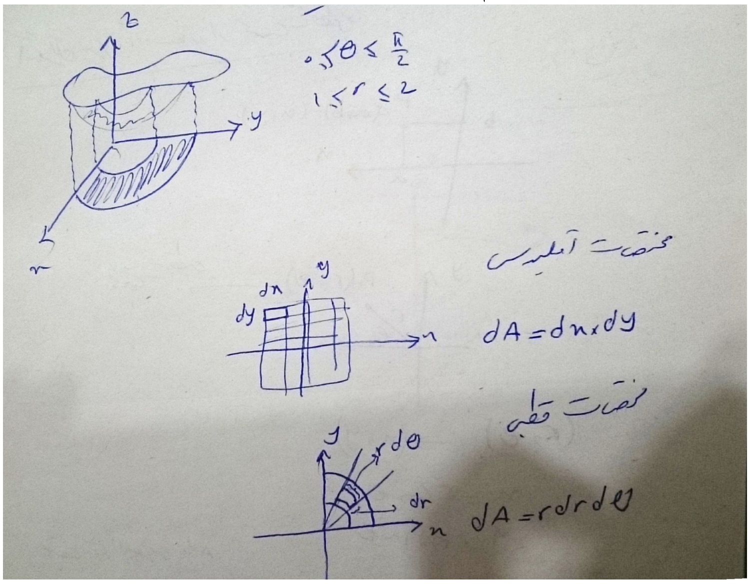


□

فرض کنید که بخواهیم حجم زیر رویه‌ی $z = f(x,y)$ و بالای ناحیه‌ی قطبی R را بیابیم. در مختصات اقلیدسی داریم:

$$dA = dxdy$$

در مختصات قطبی داریم:



$$dA = rdrd\theta$$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

مثال ۷. حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه‌ی $z = 0$ و سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ احاطه شده است.

پاسخ.

$$\iint_R f(x,y)dA \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

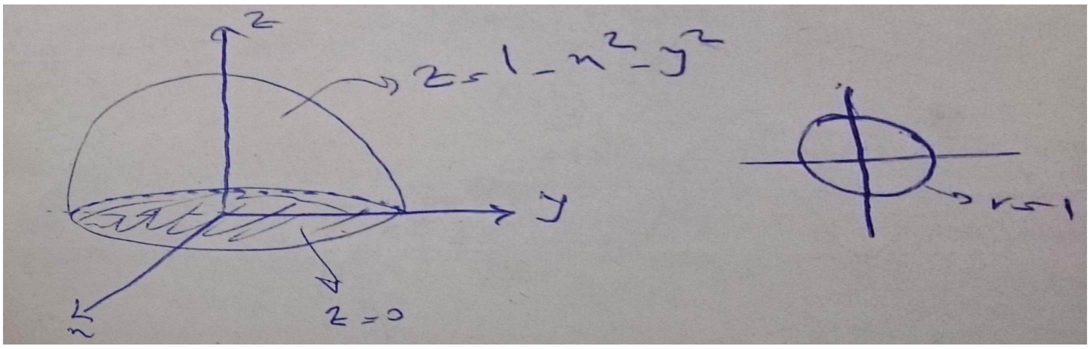
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - x^2 - y^2) rdrd\theta$$

از آنجا که می‌دانیم $x^2 + y^2 = r^2$ پس داریم:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2) rdrd\theta$$

$$\int_{۰}^{۱} (r - r^{۳})dr = (\frac{r^{۲}}{۲} - \frac{r^{۴}}{۴})|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{۴} d\theta = \frac{۱}{۴}\theta|_{۰}^{۲\pi} = \frac{\pi}{۲}$$



□

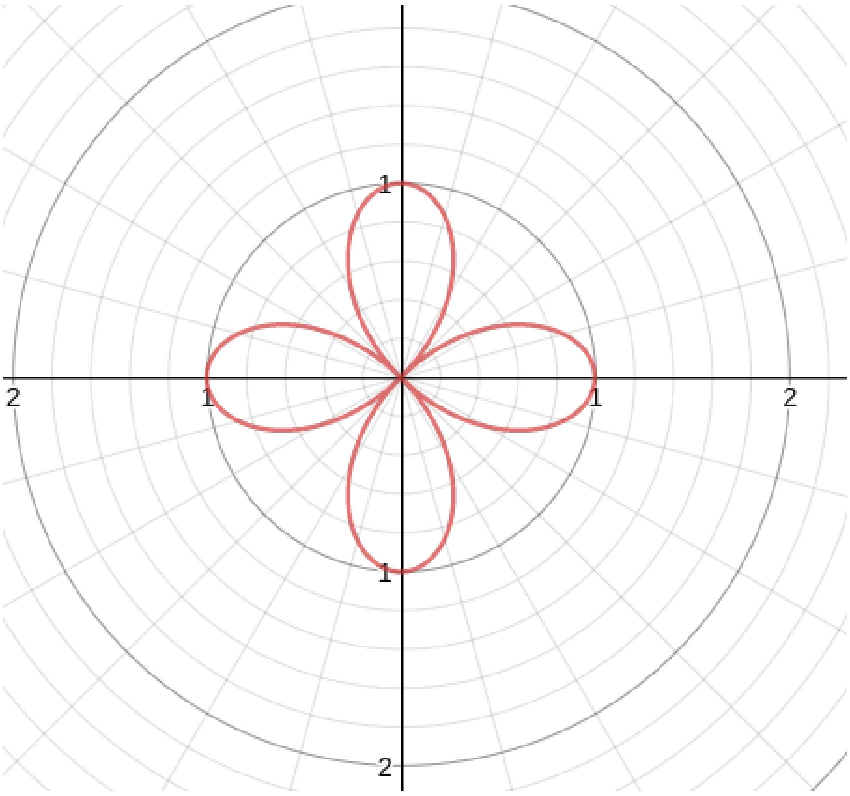
مثال ۸. مساحت احاطه شده درون گل رُزِ $r = \cos ۲\theta$ را بیابید.

پاسخ. مساحت یک قسمت را حساب می‌کنیم و در چهار ضرب می‌کنیم.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{۱} r dr d\theta = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{r^{۲}}{۲}|_{۰}^{۱} d\theta = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{۲} d\theta = \frac{۱}{۲}\theta|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۸}$$

مساحت شکل برابر است با

$$۴ \times \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۲}$$



$\square$

مثال ۹. حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ و بالای صفحه‌ی xy و درون استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ واقع شده است.

اثبات.

$$x^۲ + y^۲ = ۲x \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۱ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

$$x = r\cos\theta$$

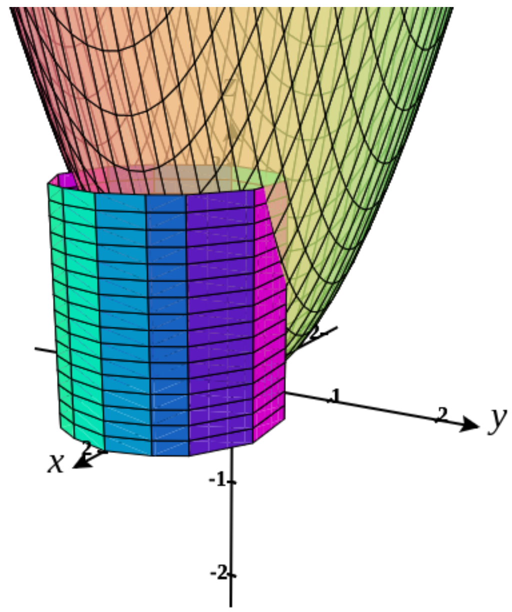
$$y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow (r\cos\theta - ۱)^۲ + r^۲\sin^۲\theta = ۱ \Rightarrow r^۲\cos^۲\theta - ۲r\cos\theta + ۱ + r^۲\sin^۲\theta = ۱$$

$$\Rightarrow r^۲ - ۲r\cos\theta = ۰ \Rightarrow r = ۲\cos\theta$$

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲\cos\theta}(r^۲)r\,dr\,d\theta = \int_۰^{۲\pi}\frac{r^۴}{۴}\Big|_۰^{۲\cos\theta}d\theta =$$

$$\int_۰^{۲\pi} ۴\cos^۴\theta\,d\theta = ۴\int_۰^{۲\pi}(\cos^۲\theta)^۲d\theta = ۴\int_۰^{۲\pi}\frac{(۱+\cos ۲\theta)^۲}{۴}d\theta$$



□

تمرین ۱۰. همان مثال قبلی را برای استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ حل کنید.